

En introduktion til Fourier Analyse med speciel reference til MRI

**Af
Henrik BW Larsson**

**November 2004, version 3
November 2012, version 4**

Indhold

I det følgende omtales:

1. Basal kompleks regning
2. Eulers formler
3. Fourier rækker
4. Fourier transformation
5. Eksempler
6. Figure
7. Foldning
8. Figure
9. Diskret Fourier transformation og 2-sidigt power spektrum (senere udgave)
10. Samplings interval, total samplingstid (senere udgave)
11. Nykvist diagram og aliasing (senere udgave)
12. Kvadratur detektion og kompleks tidssignal (senere udgave)

En forudsætning for at kunne forstå, og eventuelt manipulere med MRI sekvenser er et vist basalt kendskab til signal behandling, herunder Fourier analyse, af de radiosignaler der modtages via coils (~radioantenne) i en MR skanner. Denne fremstilling sigter ikke på at give en grundig matematisk gennemgang af dette felt, men snarere at give en intuitiv forståelse af dette interessante område.

Basal kompleks regning

Det komplekse tal er at betragte som en 2 dimensional tal størrelse, og kan afbilledes i det komplekse talplan. I figur 1 er tallet $z = a + ib$ afbillet. a og b er reelle tal, men a kaldes realdelen og b imaginærdelen, selv om det strengt taget er (ib) der er imaginærdelen. Den komplekse talenhed er i og specielt gælder at $i^2 = -1$, indført af italieneren Cardano i år 1545. Tallet $a+ib$ kan enten opfattes som et punkt, men kan også opfattes som en vektor, nemlig den der forbinder origo med punktet, som vist i tegningen.

Ved konjugering af et kompleks tal forstås $(a + ib)^* = a - ib$
Den numeriske værdi af tallet z , betegnes $|z|$ og er

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{(a + ib) \cdot (a - ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

idet $i^2 = -1$. Det ses at dette netop er hvad vi ville forvente som længde af en vektor (a,b) . Den numeriske værdi, altså længden kaldes også modulus.

Vi kan også tale om en vinkel (ofte synonymt med fasen) og denne er $\phi = \text{tg}^{-1}(b/a)$. Man taler også om argumentet for tallet z , og denne er defineret som:

$$\arg z = \{\phi + r \cdot 2\pi \mid r \in \text{heltal}\}$$

Det argument for z , der er beliggende i intervallet 0 til 360 grader kaldes hovedargumentet for z .

Andre vigtige komplekse regneregler:

addition af komplekse tal:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

multiplikation af komplekse tal:

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Som det ses af fig.2 kan z også skrives som $z = a + ib = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ hvor φ er et argument for z . z kan imidlertid også skrives som $z = |z| e^{i\varphi} = e^x e^{i\varphi} = e^{x+i\varphi}$, hvor $|z| = e^x = (a^2 + b^2)^{1/2}$ og $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Sidstnævnte ligning kan let vises ved at række udvikle de indgående størrelser, eller kan også betragtes som en definition på $e^{i\varphi}$.

Række udvikling ved Taylors metode giver for $e^{i\varphi}$, $\cos \varphi$ og $\sin \varphi$:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2} + \frac{(i\varphi)^3}{6} + \frac{(i\varphi)^4}{24} \dots$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} - \dots$$

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots$$

Multiplikation af 2 komplekse tal kan nu udføres som som

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1} |z_2| \cdot e^{i\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Det vil sige at resultatet ved multiplikation, når de komplekse tal står opskrevet på denne måde, fremkommer ved at multiplicere modulus og addere de indgående argumenter.

Ved konjugering af $z = |z| e^{i\varphi}$ fås, $z^* = |z| e^{-i\varphi}$, indvidere gælder:

$$\begin{aligned} i \cdot e^{i\varphi} &= i \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = i \cos \varphi - \sin \varphi = i \sin(\pi/2 - \varphi) - \cos(\pi/2 - \varphi) = \\ &= -\cos(\varphi - \pi/2) - i \sin(\varphi - \pi/2) = -e^{i(\varphi - \pi/2)} = e^{i(\varphi + \pi/2)} \end{aligned}$$

det vil sige at multiplikation med i er det samme som et faseskift på $+ 90$ grader.

Funktionen $s(t) = \cos(\omega_1 t)$, hvor $\omega_1 = \pi/8$ rad/s er vist i fig. 3, og funktionen $s(t) = \sin(\omega_1 t)$, hvor $\omega_1 = \pi/8$ rad/s er vist i fig. 4. I nogle tilfælde får man brug for at kunne multiplisere to cosinus funktioner, en cosinus med en sinus funktion og to sinus funktioner. Det er ikke så svært at vise at der gælder:

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = 1/2(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) = 1/2(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = 1/2(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Vi vil senere se netop disse formler anvendt når vi beskæftiger os med den såkaldte demodulering af MR signaler.

Eulersformler

Ud fra følgende formler $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ og $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, fås de berømte Eulers formler:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \text{ og } \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Vi kan grafisk fremstille eks den første af Eulers formler i det komplekse talplan, se fig. 5

Figuren er simpel men vigtigt, idet det ses at ethvert reelt tal skrevet som $A\cos\varphi$, hvor A er et reelt tal, kan skrives som en sum af 2 komplekse tal.

Ofte vil φ være en funktion af tiden : $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$, hvor ω kan være positiv, det vil sige at vinkel tilvæksten er positiv, altså positiv omløbsretning, eller negativ, dvs at vinkel tilvæksten er negativ, dvs, negativ omløbsretning. Benævnelsen for ω er radianer/tidsenhed, såsom rad/sec, men kan også opgives i grader/sec. Frekvensen f og ω er relateret til hinanden som $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, hvor T er tiden det tager for et omløb, kaldet omløbstiden eller periodetiden. φ_0 kaldes fasen, og er altså vinklen til $t = 0$.

En harmonisk roterende vektor kan effektiv skrives ved hjælp af kompleks notation som

$$s(t) = A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)} = A \cdot e^{i(2\pi f t + \varphi_0)}$$

hvor argumentet ændre sig lineært med tiden. A er her en konstant (amplituden), men kan også være en funktion af tiden, for eksempel en almindelig exponential funktion, som $A(t) = A_0 e^{-kt}$, hvor A_0 og k er konstanter, dvs uafhængig af tiden. Vi skal indtil videre betragte A som en konstant, med mindre der specificeres en tidsafhængighed.

En som ovenfor beskrevet kompleks harmonisk svingende vektor kaldes på engelsk 'a phasor', og er fuldstændig karakteriseret ved sin amplitude, frekvensen f og fasen φ_0 .

Som nævnt ovenfor skal f (eller ω) regnes med fortegn således at hvis $f > 0$ så gælder $\varphi(t_2) > \varphi(t_1)$ for $t_2 > t_1$, og for $f < 0$ gælder $\varphi(t_2) < \varphi(t_1)$ for $t_2 > t_1$. Det vil sige at vi kan tale om negative frekvenser og det udsiger blot at den roterende vektor har negativ omløbsretning.

I fig.6 blir funktionen

$$s(t) = A_0 e^{i\omega_1 t + \phi_1}$$

vist som funktion af tiden t . Vi så at det er en phasor der drejer rundt med vinkelhastigheden ω_1 i positiv omløbsretning og med startvinklen (fasen) ϕ_1 . Man kan også entydigt vise denne funktion som en funktion af vinkelhastigheden (eller frekvensen). Vi taler da om et frekvens spektrum. Dette er vist i fig. 7, hvor amplituden er afsat som funktion af frekvensen og fassen afsat som funktion af frekvensen. I stedet for at afsætte amplitude og fase, kan man istedet for afsætte real delen og imaginær delen som funktion af frekvensen som vist i fig. 8. Begge repræsentationer anvendes og er ligeværdige, idet de indeholder nøjagtig samme information. En sådan bevægelse kaldes også en cirkulært polariseret svingning. Bemærk at spektraet er en enkelt linie svarende til frekvensen i frekvens-amplitude plottet og en enkelt line svarende til frekvens-fasen plottet. Hvis nu ω_1 er negativ, hvordan tror du så spektret vil se ud? Hvis nu amplituden aftager eksponentielt, hvordan tror du så spektret vil se ud? Dette vender vi tilbage til senere, fordi dette er et nøgle punkt.

Hvis man projicerer $s(t)$ ind på den reelle akse (x-aksen) så får man,

$$proj_x(s(t)) = A \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

og hvis man projicerer $s(t)$ ind på den imaginære akse (y-aksen), så får man

$$proj_y(s(t)) = i \cdot A \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_0)$$

Se fig. 9, og fig. 10.

Nu har vi set på en kompleks phasor, spørgsmålet er så om vi kan have en kompleks phasor hvor den imaginære del hele tiden er nul, eller mere korrekt formuleret hvor projektionen ind på imaginær akse er konstant nul. En sådan bevægelse kaldes for en liniært polariseret svingning og kan i det komplekse koordinatsystem skrives som $s(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + i \cdot 0$. I mange situationer vil det være en fordel at kunne skrive dette signal som en sum (vektorielt) af 2 komplekse svingninger. Man kan (næsten) umiddelbart se at dette kan lade sig gøre som:

$$s(t) = A_0 \cdot \cos \varphi(t) = \frac{A_0}{2} \cdot e^{i\varphi(t)} + \frac{A_0}{2} \cdot e^{-i\varphi(t)} = \frac{A_0}{2} \cdot e^{i(\omega_1 t + \varphi_0)} + \frac{A_0}{2} \cdot e^{i(-\omega_1 t - \varphi_0)}$$

Dette kan grafisk fremstilles som vist på fig. 11. I det tilsvarende amplitude og fase spektrum, se fig 12, ses at amplitude spektret bliver symmetrisk, og fase spektret bliver antisymmetrisk (en spejling i origo). I fig. 13 ses det tilsvarende real og imaginær frekvens spektrum.

Vi har her en helt generelt regel: et reelt signal, liniært polariseret, har et frekvensspektrum som er symmetrisk omkring $\omega=0$ når det gælder amplituden eller real delen, og et antisymmetrisk fase eller imaginær spektrum.

Bemærk at fasen kan findes ved at sammenholde realdelen med imaginærdelen af spektret; ønsker vi at finde fasen for frekvensen $-\omega_1$ gøres dette ud fra:

$$tg^{-1} \frac{imag}{real} = tg^{-1} \frac{-\frac{A_0}{2} \sin \varphi_0}{\frac{A_0}{2} \cos \varphi_0} = -\varphi_0$$

Bemærk yderligere at de to komplekse harmoniske roterende vektorer med hver sin omløbsretning er hinandens konjugerede:

$$\left(\frac{A_0}{2} \cdot e^{i(2\pi ft + \varphi_0)}\right)^* = \frac{A_0}{2} \cdot e^{-i(2\pi ft + \varphi_0)} = \frac{A_0}{2} \cdot e^{i(-2\pi ft - \varphi_0)}$$

Endelig kan man selvfølgelig skrive de to phasors ved følgende skrivemåde, som indeholder samme information som fig.12

$$F^{pos}(\omega_1) = \frac{A_0}{2} \cdot \cos \varphi_0 + i \frac{A_0}{2} \cdot \sin \varphi_0 = \frac{A_0}{2} \cdot e^{i\varphi_0}$$

og

$$F^{neg}(-\omega_1) = \frac{A_0}{2} \cdot \cos \varphi_0 - i \frac{A_0}{2} \cdot \sin \varphi_0 = \frac{A_0}{2} \cdot e^{-i\varphi_0}$$

Heraf ses det også umiddelbart at $F^{pos}(\omega_1)^* = F^{neg}(-\omega_1)$.

Har du bemærket at vi faktisk er i fuld gang med at Fourier transformere ?. Ovenfor har du set hvordan man kan bevæge sig fra en tidslig repræsentation til en frekvens repræsentation. Det er netop det Fourier transformationen drejer sig om.

Fourier rækker

Vi har ingen intention om at indlade os på dybtgående matematiske overvejelser vedrørende eksistens og entydighed af Fourier rækker og Fourier transformation. Vores håb er derimod at bibringe læseren en intuitiv forståelse af at enhver reelt eller komplekst tidssignal (under nogle passende forudsætninger) kan beskrives som en sum af komplekse harmonisk svingende vektorer, der har forskellige frekvenser (incl. positive og negative omløbsretninger), amplituder og faser. Og omvendt hvordan Fourier transformation intuitivt kan forstås som en matematisk process, hvorved man kan finde de forskellige frekvenser, det vil sige amplituden og fasen af de indgående svingninger.

Joseph Fourier (1768-1830) gjorde i begyndelsen af det 19. århundrede den værdifulde opdagelse at periodiske reelle funktioner, $s(t)$, som er differentiabelt overalt, kan skrives som en sum af trigonometriske funktioner, kaldet Fourier rækken for $s(t)$, således

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k \frac{2\pi}{T} t) + b_k \sin(k \frac{2\pi}{T} t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)$$

hvor k er $1 \ 2 \ 3 \dots$, positive hele tal, T er periodetiden og $1/T$ er grundfrekvensen, også kaldet 1. harmoniske frekvens, $2/T$ er 2. harmoniske frekvens, $3/T$ er 3. harmoniske frekvens ect. t er kontinuert, og betegner i dette tilfælde tiden. $\frac{1}{2}a_0$ er et konstant led, ofte kaldet DC komponenten (DC: direct current), $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \dots$ kaldes Fourier koefficienterne for funktionen $s(t)$. Disse koefficienter kan være nul eller reelle tal. T er periodetiden for funktionen, det vil sige: $s(t + nT) = s(t)$, hvor n tilhører de hele tal.

Vi vil omskrive Fourier rækken så den fremtræder på kompleks form, hvilket er en mere effektiv skriveform, og den form der sædvanlig benyttes i MR mæssige sammenhæng. Idet vi sætte $\omega_1 = 2\pi/T$ har vi ifølge Eulers formler

$$\cos(k\omega_1 t) = \frac{e^{ik\omega_1 t} + e^{-ik\omega_1 t}}{2} \text{ og } \sin(k\omega_1 t) = \frac{e^{ik\omega_1 t} - e^{-ik\omega_1 t}}{2i}$$

Disse udtryk indsættes i Fourier rækken for $s(t)$:

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega_1 t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega_1 t} \right)$$

Det er her vigtigt at lægge mærke til at for hvert k har man 2 komplekse roterende vektorer der roterer hver sin vej i det komplekse plan, endvidere at længden er den samme, idet

$$\left| \frac{a_k - ib_k}{2} \right| = \left| \frac{a_k + ib_k}{2} \right|$$

og at fasen er numerisk ens men med modsat fortegn. Yderligere vil det gælde at for hver k vil summen af de 2 komplekse vektorer til ethvert tidspunkt t , addere til et reelt tal, da summen af

imaginærdelen ophæver hinanden, se også fig.11. Dette er jo også at forvente da $s(t)$ er et reelt tidssignal.

Fourierrækken for $s(t)$ kan omskrives yderligere, idet vi sætter $z_0 = \frac{1}{2}a_0$, $z_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ og $z_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$:

$$s(t) = z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (z_k e^{ik\omega_1 t} + z_{-k} e^{-ik\omega_1 t}) = z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k e^{ik\omega_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} e^{-ik\omega_1 t} =$$

$$z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k e^{ik\omega_1 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} z_k e^{ik\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{ik\omega_1 t}$$

Resultatet kan formuleres således: For den reelle periodiske (og overalt differentiabel) funktion $s(t)$, gælder at den kan opløses i en sum af vægtede komplekse roterende vektorer, og summen af alle imaginære led vil til ethvert tidspunkt være nul. Når vi skriver 'vægtede' mener vi størrelsen af z_k . Husk z_k er en kompleks størrelse, altså har en længde (modulus) og fase. I fig.14 er vist eksempler på addition (vektorielt) af phasors med forskellig frekvens, amplitude og fase, og kan resultere i vidt forskellige tidssignaler. Kan du udpege hvilke spectra der resulterer et tidssignal der er reelt og hvor imaginær delen af tidssignalet er nul?

Indenfor MR får vi også brug for komplekse tidssignaler. Dette kan måske lyde mærkeligt, men tænk blot på en magnetiseringsvektor der drejer rundt og som registreres i 2 ortogonale spoler som tidligere vist. Den ene spole opfanger det reelle signal og den anden spole opfanger det imaginære signal. Så det 'imaginære' signal er altså 'reelt' nok, altså eksisterer i virkeligheden. Vi forestiller os nu at $s(t)$ er et komplekst tidssignal : $s(t) = v(t) + iw(t)$, hvor $v(t)$ og $w(t)$ er periodiske og differentiable funktioner. Et komplekst tidssignal kan anskueliggøres som vist i fig.15. Af figuren ses at $s(t)$ beskriver en kurve i rummet, der udspændes af real- , imaginær – og tidsakse, og $v(t)$ er projektionen af denne kurve ind på planen der udspændes af real – og tidsaksen, mens $w(t)$ er projektionen af $s(t)$ ind på planen der udspændes af imaginær – og tidsaksen. Også i sådanne tilfælde kan vi skrive $s(t) = v(t) + iw(t) = \sum z_k e^{ik\omega_1 t}$, men der vil nu ikke gælde at summen af imaginærledene til ethvert tidspunkt er nul. Der vil altså gælde at z_k vil være forskellig fra z_{-k} for mindst en værdi af k . Dette er også ensbetydende med at frekvens spektret nu ikke er symmetrisk om nul. Se igen fig.14.

Oftest er vi i den situation at man ønsker at finde Fourier koefficienterne z_k ud fra et målt tidssignal, det være sig reelt eller komplekst. Disse koefficienter kan findes ved følgende formel:

$$z_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot e^{-ik\omega_1 t} dt$$

Inden vi 'beviser' denne ligning, så vil vi først prøve at anskueliggøre udtrykket. Hvis vi ønsker at finde 'hvor meget der er af første harmoniske svingning', så sætter vi $k = 1$ og får:

$s(t)$ kan opfattes som en kompleks vektor som ændrer retning og amplitude som funktion af tiden t som vist i fig.15. $\exp(-i\omega_1 t)$ er en kompleks roterende vektor der drejer rundt med grundfrekvensen

$$z_1 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot e^{-i\omega_1 t} dt$$

og selvfølgelig har en konstant amplitude på 1. Gange tegnet mellem $s(t)$ og $\exp(-i\omega_1 t)$ kan opfattes som en vektor projektion, hvor signalet $s(t)$ bliver projiceret ind på grundsvingningen, $\exp(-i\omega_1 t)$. Eller sagt på en anden måde, $\exp(-i\omega_1 t)$ går ind og opfanger hvor meget der er af netop grundsvingningen ω_1 til ethvert tidspunkt. Vi foretager denne operation i mange små tidsintervaller, dt , og opsummerer (~integrerer) dette op over en periode. På denne måde estimeres 'hvor meget' der er af grundsvingningen i signalet $s(t)$.

Sættes $k=0$, findes et gennemsnit af tidssignalet, altså DC'en:

$$z_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt$$

Et mere formelt korrekt bevis er som følger. Vi antager at Fourier's sætning er rigtigt, altså at ethvert periodisk signal kan skrives som en sum af trigonometriske funktioner, eller equivalent komplekse svingninger, hvor ω er grundfrekvensen $2\pi/T$:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \cdot e^{ik\omega t}$$

Dette udtryk indsættes i udtrykket for (en tilfældig valgt værdi) z_r :

$$\begin{aligned}
z_r &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \cdot e^{ik\omega t} \right] \cdot e^{-ir\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \cdot e^{i(k-r)\omega t} \right] dt = \\
&\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{k=-\infty}^{r-1} z_k \cdot e^{i(k-r)\omega t} + \sum_{k=r}^r z_k \cdot e^{i(k-r)\omega t} + \sum_{k=r+1}^{\infty} z_k \cdot e^{i(k-r)\omega t} \right] dt = \\
&\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{k=-\infty}^{r-1} z_k \cdot e^{i(k-r)\omega t} + z_r + \sum_{k=r+1}^{\infty} z_k \cdot e^{i(k-r)\omega t} \right] dt = \\
&\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{r-1} z_k \cdot e^{i(k-r)\omega t} dt + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z_r dt + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{k=r+1}^{\infty} z_k \cdot e^{i(k-r)\omega t} dt = \\
&\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{r-1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z_k \cdot e^{i(k-r)\omega t} dt + \frac{1}{T} z_r \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) + \frac{1}{T} \sum_{k=r+1}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z_k \cdot e^{i(k-r)\omega t} dt = z_r
\end{aligned}$$

fordi udtrykket

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z_k \cdot e^{i(k-r)\omega t} dt = 0$$

for alle $k \neq r$, (k og r tilhører alle heltal), idet $e^{i(k-r)\omega t}$ er en kompleks roterende vektor der roterer $k-r$ hele antal gange 2π på en periode tid T . Jævnfør at arealet under cosinus funktionen er nul hvis man betragter et vilkårligt antal hele svingninger.

z_k vil ofte være et komplekst tal. Vi kan udregne z_k for enhver værdi af k ($= \dots -1, 0, 1, 2, 3, \dots$), altså er z_k en funktion af k : $z_k = F(k\omega_1) = F(\omega_k)$, $k\omega_1 = \omega_k$. $\omega_1 = 2\pi/T$, altså 1. harmoniske svingnings vinkelhastighed. Den 2. harmoniske svingning har vinkelhastigheden $\omega_2 = 4\pi/T$, den 3. harmoniske svingning har vinkelhastigheden $\omega_3 = 6\pi/T$ og den k . harmoniske svingning har vinkelhastigheden $\omega_k = k2\pi/T$.

Hvad repræsenterer $z_k = F(k\omega_1) = F(\omega_k)$ så? $F(\omega_k)$ viser 'hvor meget der er' af vinkelfrekvensen ω_k , sagt med andre ord: amplituden men også fasen. Da $F(\omega_k)$ er et komplekst tal, kan vi skrive

$$F(\omega_k) = A(\omega_k) \cdot e^{i\varphi_0(\omega_k)}$$

hvor A er amplituden (modulus) og φ_0 er fasen (vinklen til tiden nul) for en given vinkelhastighed ω_k . ω_k er, som tidligere nævnt, lig med $k2\pi/T$, og $1/T = f_1$, grundfrekvensen, hvorfor $\omega_k = k2\pi f_1$. Vi kan derfor også skrive

$$F(f_k) = A(f_k) \cdot e^{i\varphi_0(f_k)}$$

idet $f_k = k \cdot f_1$.

Afbildes F som funktion af frekvensen f , taler vi om et frekvensspektrum.

Bemærk at den mindste afstand mellem vinkelhastigheder, for hvilke vi kan udregne Fourierkoefficienter er

$$\omega_{k+1} - \omega_k = (k+1) \frac{2\pi}{T} - k \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}$$

Det vi sige at den mindste afstand målt i Hertz er $1/T$, det vil sige omvendt proportional med periode tiden T . Et periodisk tidssignal giver således ved Fouriertransformation et linie spektrum hvor linierne er adskilt med $1/T$ Hertz. Er tidssignalet reelt fås som tidligere omtalt, et symmetrisk frekvens spektrum for amplituden og antisymmetrisk for fase, se fig.14.

Fourier transformation

Det forrige kapitel handlede om periodiske tidssignaler $s(t)$, med perioden T . Vi så at signalet kunne til ethvert tidspunkt, t , opfattes som en sum af komplekse vektorer, og disse roterede i det komplekse plan med frekvenser der var et multiplum af $1/T$, og ved afbildning af frekvensspektret fik vi et liniespektrum, hvor linierne var adskilt med $1/T$.

Vi forestiller os nu at periodetiden T går mod uendelig. Dette betyder at signalet, $s(t)$, om uendelig lang tid gentager sig selv, det vil sige at signalet for praktiske formål, ikke er periodisk mere, vi siger at signalet er a-periodisk. Hvis tidssignalet kun eksisterer i et endeligt tidsinterval taler vi om et transient signal. Men dette betyder også at linie afstanden i frekvensspektret bliver mindre og mindre jo større T bliver. I det ekstreme tilfælde hvor T er uendelig stor, bliver frekvensspektret en kontinuert spektrum.

Fourier transformation af det transiente signal, $s(t)$, er:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

hvor ω er nu er en kontinuert variabel, og $F(\omega' \mid \omega' = \text{en given værdi})$ er en kompleks størrelse og kan skrives som

$$F(\omega') = A(\omega') \cdot e^{i\varphi_0(\omega')}$$

hvor A er amplituden for vinkelhastigheden ω' og φ_0 er fasen (vinklen til $t=0$) for vinkelfrekvensen ω' . Bemærk at integrationsgrænserne nu går fra minus uendelig til plus uendelig, svarende til at perioden længden T nu er uendelig stor.

Man kan også genskabe signalet $s(t)$ ud fra $F(\omega)$, ved hjælp af den inverse Fourier transformation. Der gælder at

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

hvor $s(t)$ er et a -periodisk, reelt eller komplekst tidssignal. Vi vil ikke bevise sidste sætning, selv om det ikke er så svært. $s(t)$ og $F(\omega)$ kaldes et Fourier transformationspar eller kort et Fourier par.

Eksempler

Vi vil nu gå igang med at se på en række eksempler

Eksempel 1.

Vi vil Fourier transformere $s(t) = A_1 \cos(\omega_1 t)$, hvor ω_1 er en given frekvens. Her kan vi umiddelbart udregne resultatet, idet der kun er en frekvens, $f_1 = \omega_1/2\pi$ ($\omega_1 = 2\pi/T = 2\pi f_1$) og amplituden er A_1 , og fassen er nul. Det vil sige at vi umiddelbart kan Fourier transformere dette signal, men det er alligevel interessant at se at formel apparatet giver det vi forventer. Funktionen er periodisk så vi har ovenfor lært at vi skal lade integrations grænserne løbe over en periode:

$$F(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T A_1 \cos(\omega_1 t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{A_1}{T} \int_0^T \frac{e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}}{2} \cdot e^{-i\omega t} dt =$$

$$\frac{A_1}{2T} \int_0^T (e^{i(\omega_1 - \omega)t} + e^{-i(\omega_1 + \omega)t}) dt$$

En periodisk funktion giver et linie spektrum og ω kan kun antage diskrete værdier af grundfrekvensen:

$\omega = k\omega_1$, hvor k tilhører positive og negative heltal ($\dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$). Vi kan starte med at undersøge hvor meget der er af den 2. harmoniske frekvens: $\omega = 2\omega_1$:

$$F(2\omega_1) = \frac{A_1}{2T} \int_0^T (e^{-i\omega_1 t} + e^{-i3\omega_1 t}) dt = 0$$

Kan du forklare hvorfor dette bliver nul?

Lad os prøve at se hvor meget der er af $\omega = \omega_1$:

$$F(\omega_1) = \frac{A_1}{2T} \int_0^T (e^{-i0t} + e^{-i2\omega_1 t}) dt = \frac{A_1}{2T} \int_0^T (1 + e^{-i2\omega_1 t}) dt =$$

$$\frac{A_1}{2T} \int_0^T dt + \frac{A_1}{2T} \int_0^T e^{-i2\omega_1 t} dt = \frac{A_1}{2T} T - 0 = \frac{A_1}{2}$$

Hvis vi sætter $\omega = -\omega_1$ får vi :

$$F(-\omega_1) = \frac{A_1}{2}$$

Faktisk vil F være nul overalt, undtagen for lige netop $\omega = \omega_1$ og $\omega = -\omega_1$, det vil sige at vi netop får de 2 linier i spektret, begge med amplituderne $A_1/2$. $A_1/2$ er et reel tal så faserne er nul.

Eksempel 2.

Vi ønsker at sende et radiosignal med et veldefineret frekvensindhold $F(\omega)$, hvor der gælder:

$$F(\omega) = \begin{cases} \text{realdel}(F(\omega)) = K, \text{ for } -\omega_b \leq \omega \leq +\omega_b \\ \text{imag}(F(\omega)) = 0 \end{cases}$$

hvor K er en konstant. Denne situation er relevant indenfor MRI i den situation hvor man ønsker at exciterer en skive. Man påtrykker en magnetisk feltgradient, hvis styrke med til at definere skive tykkelsen, og så sender man radiobølger som er båndbegrænset på ovenstående måde. Vi ønsker nu at finde ud af hvordan radiobølgerne skal sendes i tidsdomænet. Her kan vi benytte den inverse Fourier transformation. At imaginærdelen er nul betyder at de komplekse roterende vektorer alle til tiden 0, vil have en vinkel på 0, altså faserne er nul. Hvis de komplekse roterende vektorer alle har vinklen 0 til $t=0$, så må det betyde at tidssignalet er størst svarende til dette tidspunkt. Vi benytter nu formelen for den inverse Fourier transformation for at finde tidssignalet. Bemærk at F ikke er periodisk:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} K \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{K}{2\pi} \left[\frac{1}{it} \cdot e^{i\omega t} \right]_{-\omega_b}^{\omega_b} = \frac{K}{\pi} \left(\frac{e^{i\omega_b t} - e^{-i\omega_b t}}{2i} \right) =$$

$$\frac{K}{\pi} \cdot \sin(\omega_b t) = \frac{K}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_b t)}{t} = \frac{K\omega_b}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_b t)}{\omega_b t}$$

En funktion af formen $\sin(x)/x$ kaldes en sinc funktion. $s(t)$ er et reelt signal og uendeligt langt og er vist i fig.16. I dette eksempel er $\omega_b = 2\pi 10$ (rad/s), det vil sige $f_b = 10$ Hz. $s(t)$ går igennem 0 når $\sin(\omega_b t) = 0$, altså for $\omega_b t = r\pi$, hvor r er et helt tal. Det vil sige at $s(t) = 0$ for $t = r\pi/\omega_b$. Nulgennemgang sker derfor for $t = r\pi/(2\pi 10) = r 0.05$ s. Bemærk at $\sin(0)/0 = 1$!

Hvad sker der hvis ω_b nærmer sig 0 ? Det vil sige at vi gør frekvensbåndet smallere og smallere, og til sidst vil vi ende med en linie svarende til frekvensen 0, altså en DC. Det vil sige vi har ingen roterende komponenter (phasors). Hvordan kommer det tilsvarende signal $s(t)$ til at se ud?.

Svarende til at ω_b går mod 0, så går tiden $t = r\pi/\omega_b$, svarende til nul gennemgangen mod uendelig, det vil sige at $s(t)$ bliver en konstant, idet nulgennemgangen for $s(t)$ ligger uendelig langt væk.

Eksempel 3.

I ovenstående eksempel lå frekvensbåndet symmetrisk omkring frekvensen 0. Hvis nu frekvensbåndet er asymmetrisk, som vist i Figur 16_2, hvor frekvensbåndet går fra $\omega_1 = 20$ Hz til $\omega_2 = 40$ Hz, så bliver tidskurverne lidt anderledes. Der gælder altså:

$$F(\omega) = \begin{cases} \text{realdel}(F(\omega)) = K, \text{ for } \omega_1 \leq \omega \leq +\omega_2 \\ \text{imag}(F(\omega)) = 0 \end{cases}$$

Den midterste frekvens kalder vi $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2 = 30$ Hz, i det konkrete eksempel. Vi bruger igen formelen for den inverse Fourier transformation:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} K \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{K}{2\pi} \left[\frac{1}{it} \cdot e^{i\omega t} \right]_{\omega_1}^{\omega_2} = \frac{K}{\pi t} \left(\frac{e^{i\omega_2 t} - e^{i\omega_1 t}}{2i} \right) =$$

$$\frac{K}{\pi t} \cdot \left(\frac{e^{i\omega_2 t} e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_0 t} - e^{i\omega_1 t} e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_0 t}}{2i} \right) = \frac{K}{\pi t} e^{i\omega_0 t} \left(\frac{e^{i(\omega_2 - \omega_0)t} - e^{-i(\omega_0 - \omega_1)t}}{2i} \right)$$

Der gælder at $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_0 = \omega_0 - \omega_1 = 10$ Hz, se figur. Sidste brøk er derfor en sinus funktion; hvis vi yderligere ganger og deler med $\Delta\omega$, får vi:

$$s(t) = \frac{K \Delta\omega}{\pi} e^{i\omega_0 t} \frac{\sin(\Delta\omega t)}{\Delta\omega t} = \frac{K \Delta\omega}{\pi} e^{i\omega_0 t} \text{sinc}(\Delta\omega t)$$

Realdelen og imaginærdelen af signalet bliver:

$$\text{real } s(t) = \frac{K \Delta\omega}{\pi} \cos(\omega_0 t) \text{sinc}(\Delta\omega t)$$

$$\text{imag } s(t) = \frac{K \Delta\omega}{\pi} \sin(\omega_0 t) \text{sinc}(\Delta\omega t)$$

Disse tidssignaler er også vist i Figur 16_2. Vi ser, at vi som i forrige eksempel får en sinc funktion, men nu multipliceret med en cosinus funktion som svinger med centerfrekvensen for real akse, og en tilsvarende sinus funktion for imaginærakse. Sinc funktionen er svagt antydet på figuren og er identisk med den sinc funktion vi fandt i forrige eksempel. Figur 16_3 viser samme figur, dog er tidsaksen trukket ud for at tydeliggøre tidsforløbet. Dette eksempel illustrerer situationen ved excitation af en slice. Her ønsker man netop at denne sende en båndbegrænset RF puls med den viste profil. For at opnå denne profil skal man altså sende en uendelig lang sinc formet puls. I sagens natur er det umuligt idet RF pulsen må være endelig. Dette vil selvfølgelig have en effekt på frekvensindholdet og dermed slice profilen. Kan du i ord beskrive hvad der sker med slice profilen når RF pulsen er endelig?

Eksempel 4.

Der gælder:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

og

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{i\omega t} dt$$

Hvis $s(t)$ er en reel funktion ses det umiddelbart at $F(\omega) = F^*(-\omega)$. Hvis tidssignalet, $s(t)$, er symmetrisk omkring $t = 0$, det vil sige $s(t) = s(-t)$, så gælder:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(-t) \cdot e^{-i\omega t} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} s(-t) \cdot e^{-i\omega t} d(-t) = \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} s(-t) \cdot e^{-i\omega t} d(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{i\omega t} dt = F(-\omega) \end{aligned}$$

Det vil sige at $F(\omega) = F(-\omega)$ og $F(\omega) = F^*(-\omega)$. Dette kan kun lade sig gøre hvis imaginærdelen (fasen) er nul. Konklusion: Hvis tidssignalet er reelt og symmetrisk, så vil frekvens spektret være symmetrisk og imaginær delen vil være nul.

Eksempel 5.

Et eksempel på en symmetrisk, a-periodisk, reel tidsfunktion: $s(t) = A \exp(-k|t|)$ hvor A og k er konstanter, se fig.17.

Fourier transformation af denne funktion giver:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-k|t|} \cdot e^{-i\omega t} dt = A \int_{-\infty}^0 e^{kt} \cdot e^{-i\omega t} dt + A \int_0^{\infty} e^{-kt} \cdot e^{-i\omega t} dt = A \int_{-\infty}^0 e^{(k-i\omega)t} dt + A \int_0^{\infty} e^{-(k+i\omega)t} dt = \\ &= \frac{A}{k-i\omega} \left[e^{(k-i\omega)t} \right]_{-\infty}^0 - \frac{A}{k+i\omega} \left[e^{-(k+i\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{k-i\omega} + \frac{A}{k+i\omega} = \frac{A(k+i\omega)}{k^2+\omega^2} + \frac{A(k-i\omega)}{k^2+\omega^2} = \\ &= \frac{Ak}{k^2+\omega^2} + i \frac{A\omega}{k^2+\omega^2} + \frac{Ak}{k^2+\omega^2} - i \frac{A\omega}{k^2+\omega^2} = \frac{2Ak}{k^2+\omega^2} \end{aligned}$$

Det ses at F er reel og symmetrisk omkring $\omega = 0$, sådan som nævnt i ovenfor nævnte eksempel.

$F(\omega)$ kaldes en Lorentz kurve; kender vi den fra MR? Jo $s(t)$ kunne være et eksempel indhyldningskurven for et FID, (svarende til at vi er on resonance) og $F(\omega)$ er spektret, se fig.17.

Eksempel 6.

Et eksempel på en ikke symmetrisk, reel og a-periodisk tidsfunktion: $s(t) = A \exp(-kt)$ gældende for $t \geq 0$. $s(t)$ er nul for $t < 0$. Se fig.18.

Fourier transformation af denne funktion giver:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-kt} \cdot e^{-i\omega t} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(k+i\omega)t} dt = -\frac{A}{k+i\omega} \left[e^{-(k+i\omega)t} \right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{A}{k+i\omega} = \frac{A}{k+i\omega} \cdot \frac{k-i\omega}{k-i\omega} = \frac{A(k-i\omega)}{k^2+\omega^2} = \frac{Ak}{k^2+\omega^2} - i \frac{A\omega}{k^2+\omega^2} \end{aligned}$$

$F(\omega)$ er vist i fig.18. Bemærk at imaginærdelen nu ikke er nul, og da $s(t)$ er en reel funktion så gælder $F(\omega) = F^*(-\omega)$. Bemærk også at maximal værdien af $F(\omega)$ er halvdelen af $F(\omega)$ i forrige eksempel, og at modulus spektret bliver smallere ved symmetrisk sampling. Dette kan være relevant indenfor MRI, hvor man ofte vil tilstræbe at sample MR signalet symmetrisk, typisk sample et spin-ekko, hvor man tilstræber at placere ekkoet midt i ADC perioden.

Eksempel 7.

Vi gentager nu forrige eksempel, med den modifikation, at vi kun samler vores signal til tiden t_1 . Det vil sige at vi betragter signalet $s(t) = A \exp(-kt)$, for $0 \leq t \leq t_1$, og $s(t) = 0$, for $t \leq 0$ og $t \geq t_1$.

Fourier transformationen giver:

$$F(\omega) = \int_0^{t_1} A \cdot e^{-kt} \cdot e^{-i\omega t} dt = -\frac{A}{k+i\omega} \left[e^{-(k+i\omega)t} \right]_0^{t_1} = -\frac{A}{k+i\omega} \cdot e^{-(k+i\omega)t_1} + \frac{A}{k+i\omega} =$$

$$-\frac{A(k-i\omega)}{k^2+\omega^2} \cdot e^{-(k+i\omega)t_1} + \frac{A(k-i\omega)}{k^2+\omega^2}$$

Dette udtryk ser ubehageligt ud, men det det gælder om er at samle de led der indeholder i og samle de led der ikke indeholder i :

$$-\frac{A(k-i\omega)}{k^2+\omega^2} \cdot e^{-(k+i\omega)t_1} + \frac{A(k-i\omega)}{k^2+\omega^2} = \left(-\frac{Ak}{k^2+\omega^2} + i\frac{A\omega}{k^2+\omega^2}\right) \cdot e^{-i\omega t_1} \cdot e^{-kt_1} + \frac{Ak}{k^2+\omega^2} - i\frac{A\omega}{k^2+\omega^2} =$$

$$\left(-\frac{Ak}{k^2+\omega^2} + i\frac{A\omega}{k^2+\omega^2}\right) \cdot (\cos \omega t_1 - i \sin \omega t_1) \cdot e^{-kt_1} + \frac{Ak}{k^2+\omega^2} - i\frac{A\omega}{k^2+\omega^2} =$$

$$\frac{A}{k^2+\omega^2} \cdot (e^{-kt_1} (k \cos \omega t_1 + \omega \sin \omega t_1) + k) + i\frac{A}{k^2+\omega^2} \cdot (e^{-kt_1} (\omega \cos \omega t_1 + k \sin \omega t_1) - \omega)$$

Vi har nu samlet de reelle led og de imaginære led og kan vise hvordan realdelen og imaginærdelen ser ud som funktion af ω , se fig.19.

Bemærk i modsætning til forrige eksempel forekommer der nu nogle ekstra svingninger. Dette er et helt generelt fænomen, at når man afskærer funktionen (signal trunkering) så får man nogle ekstra svingninger også kaldet Gibbs ringninger. Ser man godt efter kan man på almindelige MR billeder umiddelbart se disse Gibbs ringninger, hvilket altså skyldes at man ikke kan sample sit signal uendelig længe, men er nødt til at stoppe samplingen på et tidspunkt.

Eksempel 8.

Vi gentager nu eksempel 5, dog med den modifikation at signalet yderligere er ganget med en cosinus funktion:

$$t \geq 0 : s(t) = A \cdot e^{-kt} \cdot \cos \omega_1 t$$

$$t < 0 : s(t) = 0$$

k og ω_1 er konstante størrelse, og funktionen er vis i fig.20, med $\omega_1=2 \pi 0.4$ rad/s, det vil sige at den exponentiel aftagende funktion er moduleret med en svingning på 0.4 Hz. $k= 0.1$ og $A=2$. Dette kunne repræsentere et FID (off resonance).

Fourier transformationen af denne funktion giver:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-kt} \cdot \cos \omega_1 t \cdot e^{-i\omega t} dt = A \int_0^{\infty} e^{-kt} \cdot \frac{e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}}{2} \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{2} \int_0^{\infty} e^{-kt} \cdot e^{-i(\omega - \omega_1)t} dt + \frac{A}{2} \int_0^{\infty} e^{-kt} \cdot e^{-i(\omega_1 + \omega)t} dt$$

De 2 sidste led er af samme form som i eksempel 5, hvor blot ω er erstattet med $\omega - \omega_1$ henholdsvis $\omega + \omega_1$. Vi får:

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} \int_0^{\infty} e^{-kt} \cdot e^{-i(\omega - \omega_1)t} dt + \frac{A}{2} \int_0^{\infty} e^{-kt} \cdot e^{-i(\omega_1 + \omega)t} dt &= \frac{\frac{1}{2} Ak}{k^2 + (\omega - \omega_1)^2} - i \frac{\frac{1}{2} A(\omega - \omega_1)}{k^2 + (\omega - \omega_1)^2} + \\ \frac{\frac{1}{2} Ak}{k^2 + (\omega + \omega_1)^2} - i \frac{\frac{1}{2} A(\omega + \omega_1)}{k^2 + (\omega + \omega_1)^2} &= \\ \frac{\frac{1}{2} Ak}{k^2 + (\omega - \omega_1)^2} + \frac{\frac{1}{2} Ak}{k^2 + (\omega + \omega_1)^2} - i \left(\frac{\frac{1}{2} A(\omega - \omega_1)}{k^2 + (\omega - \omega_1)^2} + \frac{\frac{1}{2} A(\omega + \omega_1)}{k^2 + (\omega + \omega_1)^2} \right) \end{aligned}$$

$F(\omega)$ er vist i fig.20. Bemærk at funktionen er af samme form som i eksempel 5, men der er nu 2 toppe og de ligger ved henholdsvis $+\omega_1$ og $-\omega_1$. Da funktionen $s(t)$ er reel, så får vi som sædvanlig at $F(\omega) = F^*(-\omega)$.

Eksempel 9.

Vi vil nu se på et komplekst tidssignal :

$$t \geq 0 : s(t) = A \cdot e^{-kt} \cdot e^{i\omega_1 t}$$

$$t < 0 : s(t) = 0$$

k og ω_1 er konstante størrelser,

Kan vi forestille os et sådan signal? Ja eksemplet ligger lige foran os. Vi kan blot tænke på en magnetiserings vektor der roterer rundt om B_0 med vinkelhastigheden ω_1 . Samtidig med den roterer, bliver størrelsen mindre og mindre idet der sker et decay med $\exp(-kt)$.

Fourier transformation af denne funktion giver:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^{\infty} A \cdot e^{-kt} \cdot e^{i\omega_1 t} \cdot e^{-i\omega t} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(k+i(\omega-\omega_1))t} dt = \left[\frac{A}{-(k+i(\omega-\omega_1))} \cdot e^{-(k+i(\omega-\omega_1))t} \right]_0^{\infty} = \\ \frac{A}{k+i(\omega-\omega_1)} &= \frac{A}{k+i(\omega-\omega_1)} \cdot \frac{k-i(\omega-\omega_1)}{k-i(\omega-\omega_1)} = \frac{Ak}{k^2 + (\omega-\omega_1)^2} - i \frac{A(\omega-\omega_1)}{k^2 + (\omega-\omega_1)^2} \end{aligned}$$

$F(\omega)$ er vist i fig.21. Igen ser vi samme form som i eksempel 5, men forskudt ω_1 til højre, og der er nu kun en top. $k=0.1$ og $A=2$. Og da tidssignalet ikke er reelt, gælder der ikke at $F(\omega) = F^*(-\omega)$. Spektret er rent ensidigt. I Figur 21_2 er $\omega_1 = 2\pi \cdot 0.6$ og $k=0.1$ og $A=2$. Og i Figur 21_3 er $\omega_1 = 2\pi \cdot 0.4$ og $k=0.2$ og $A=2$. Forklar i ord hvad der sker og hvilken relevans dette har for MR.

Fig.1

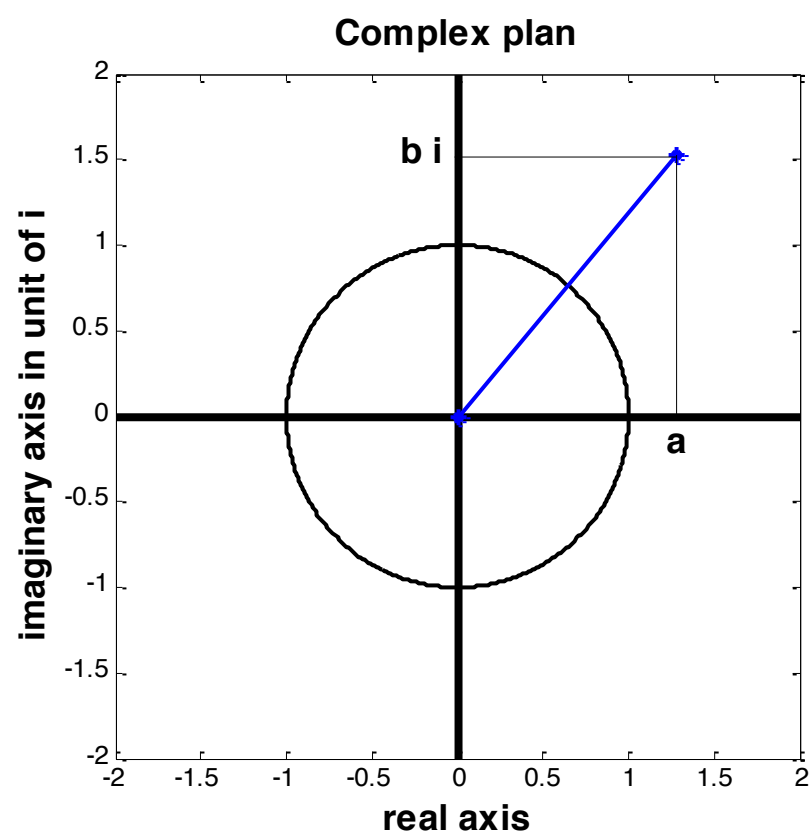


Fig.2

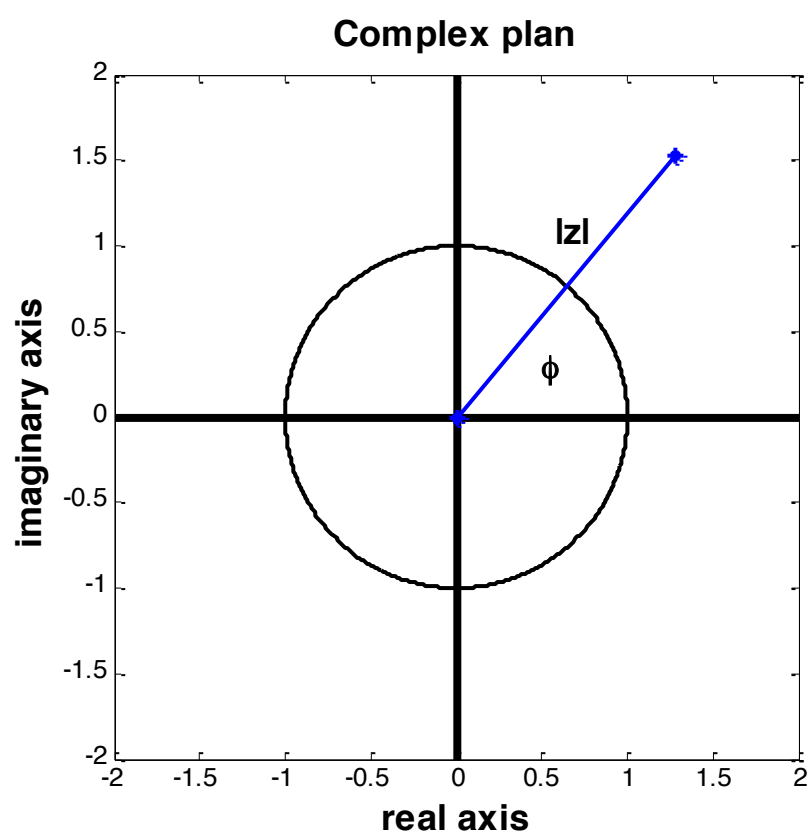


Fig.3

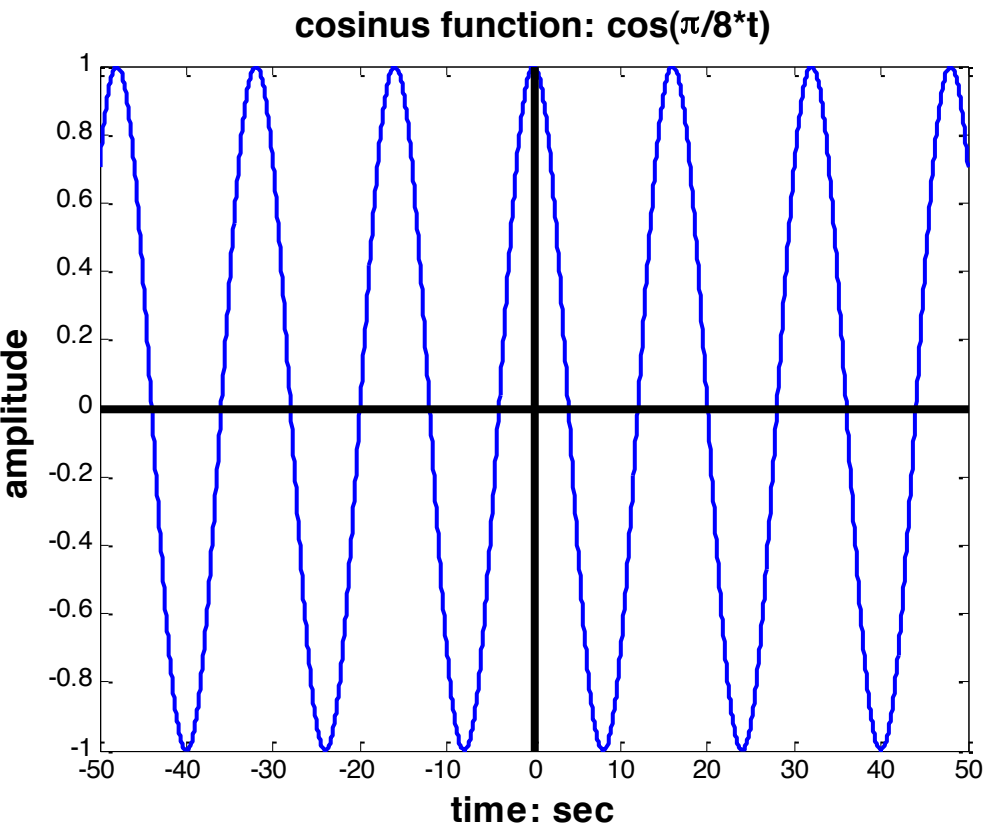


Fig.4

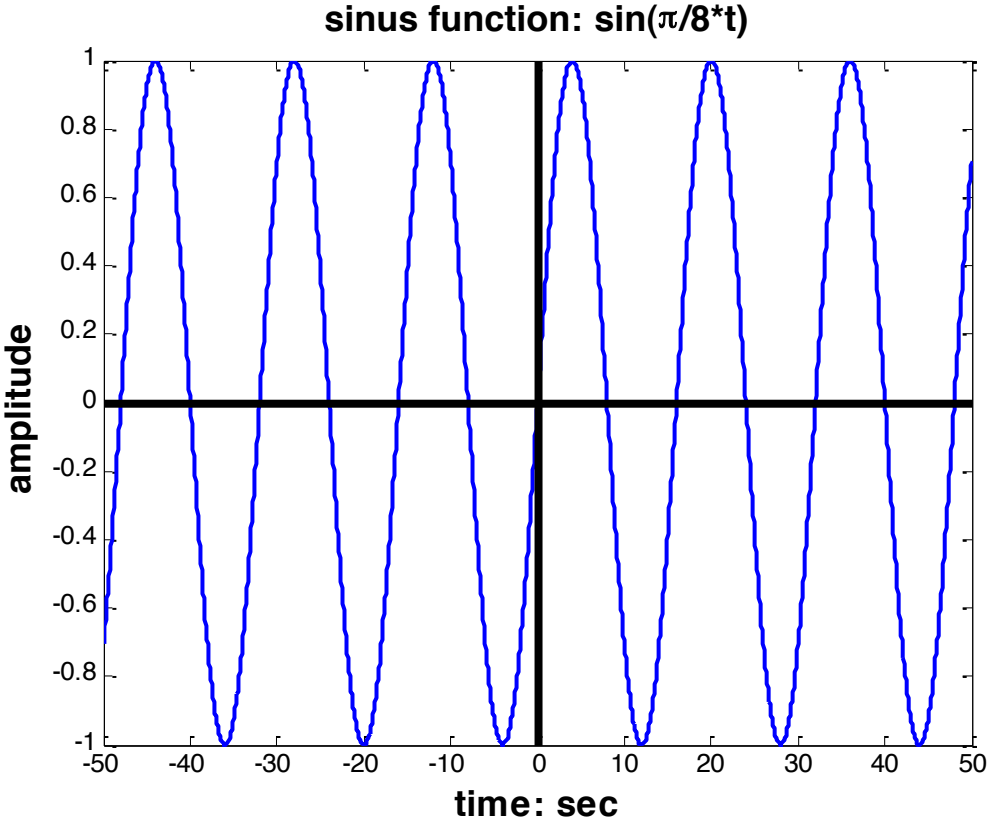


Fig.5

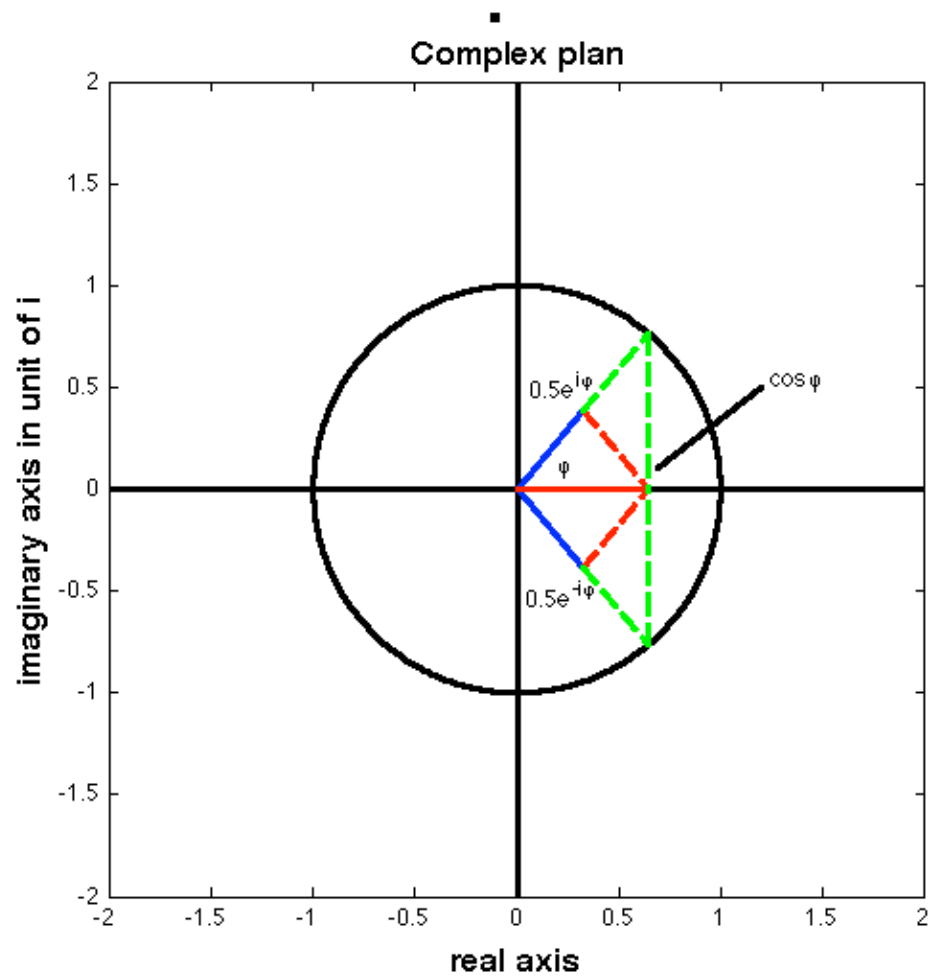


Fig.6

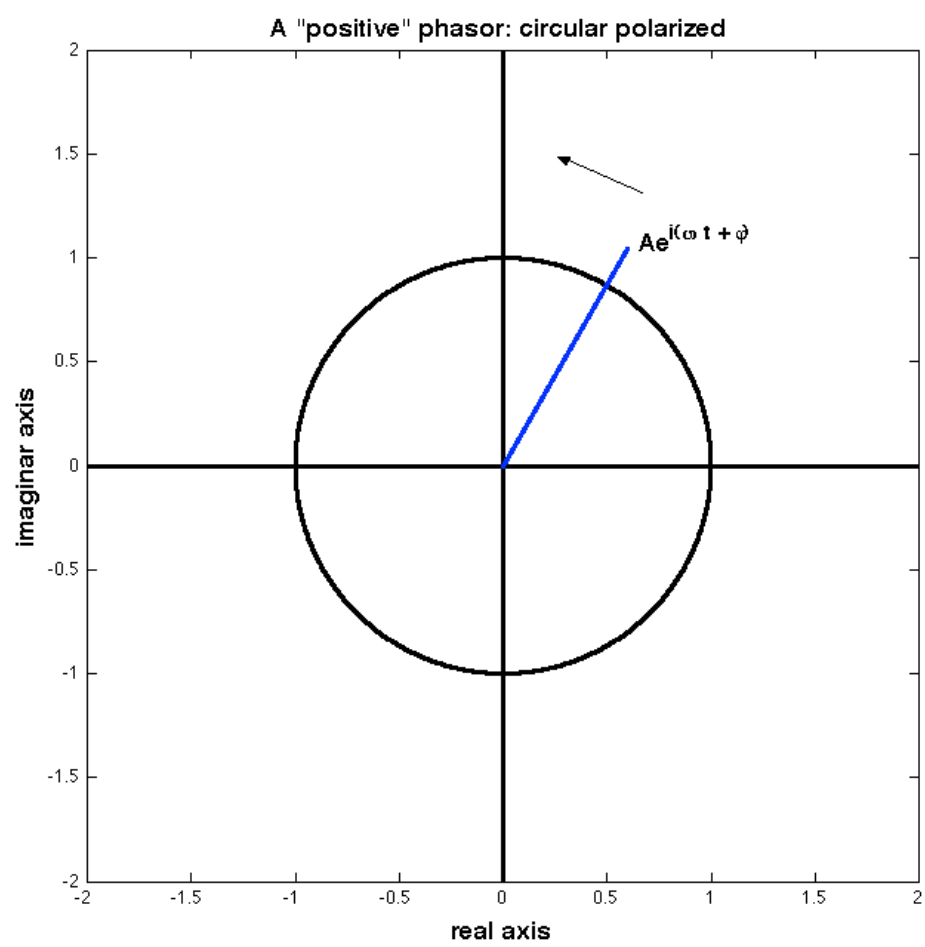


Fig.7

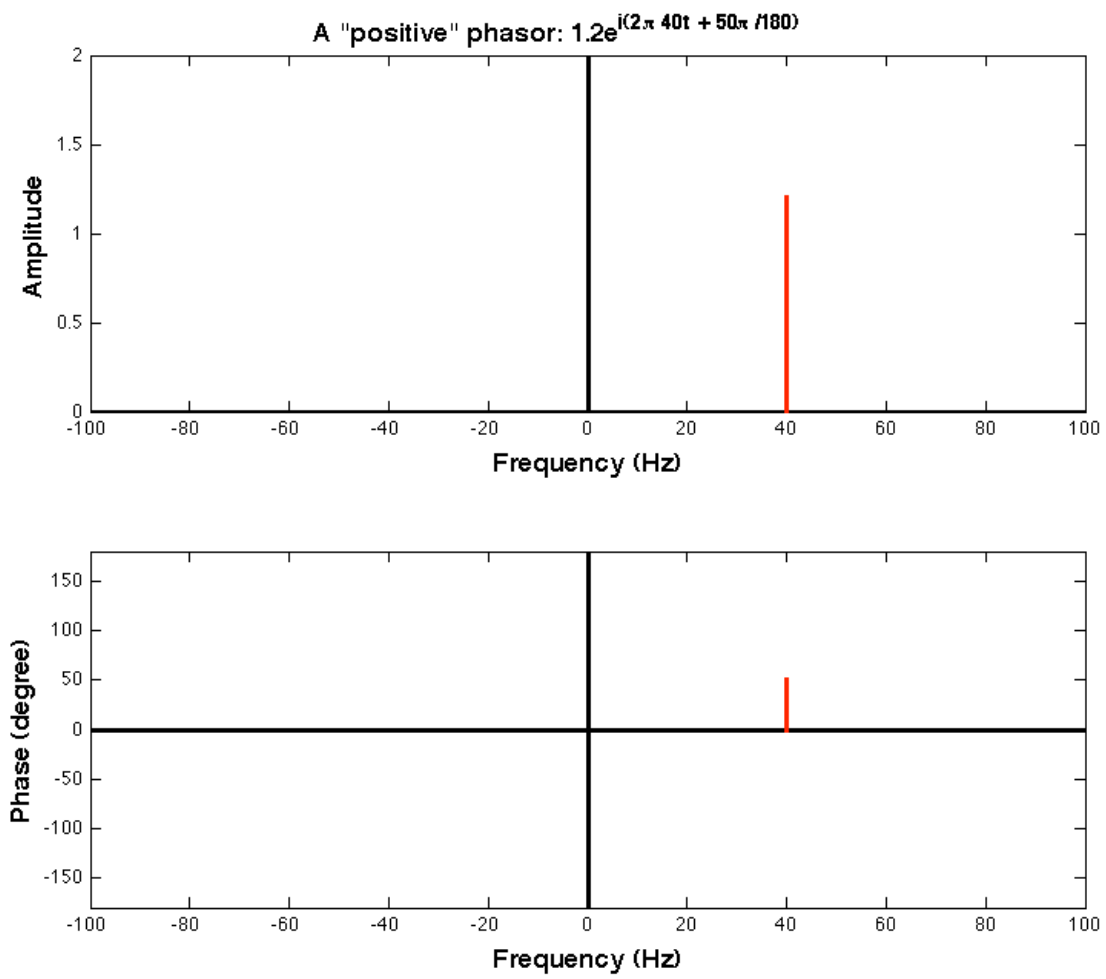


Fig.8

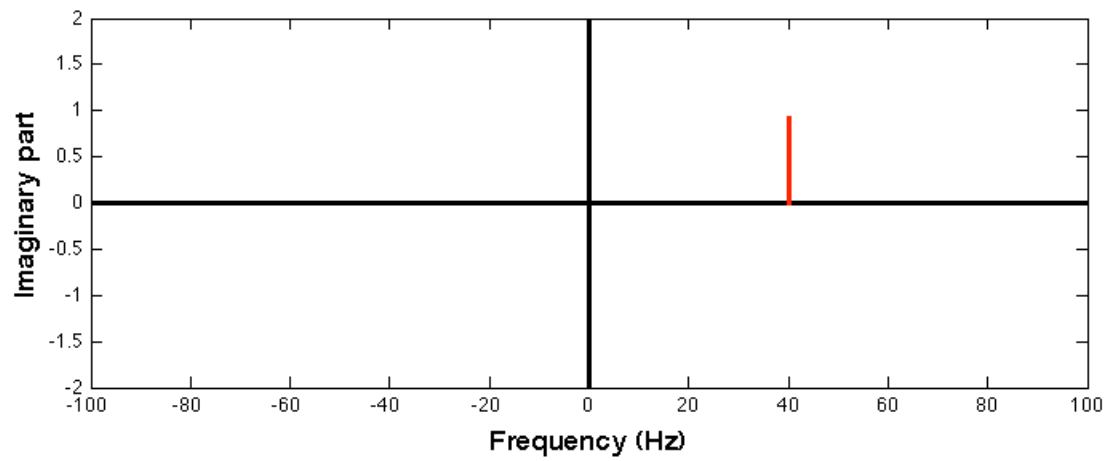
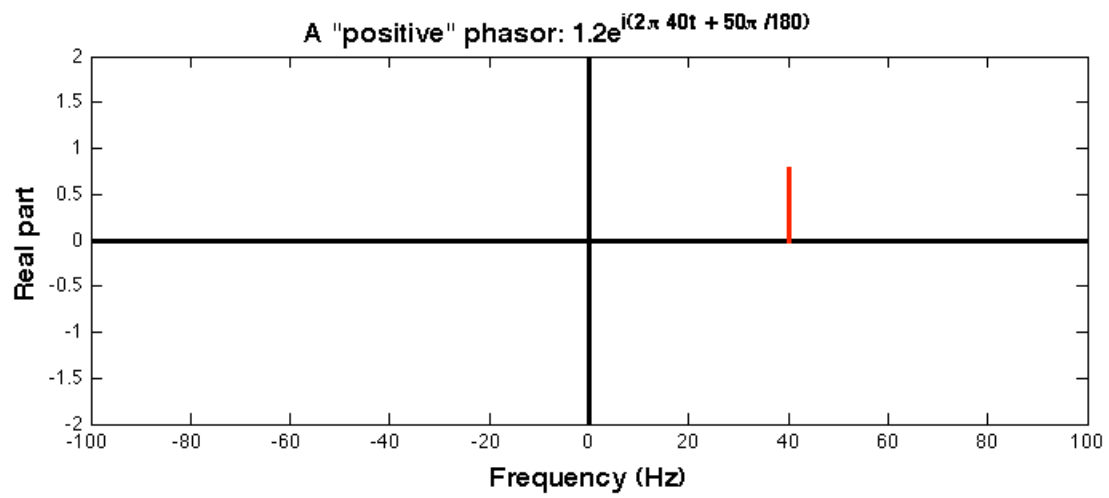


Fig.9

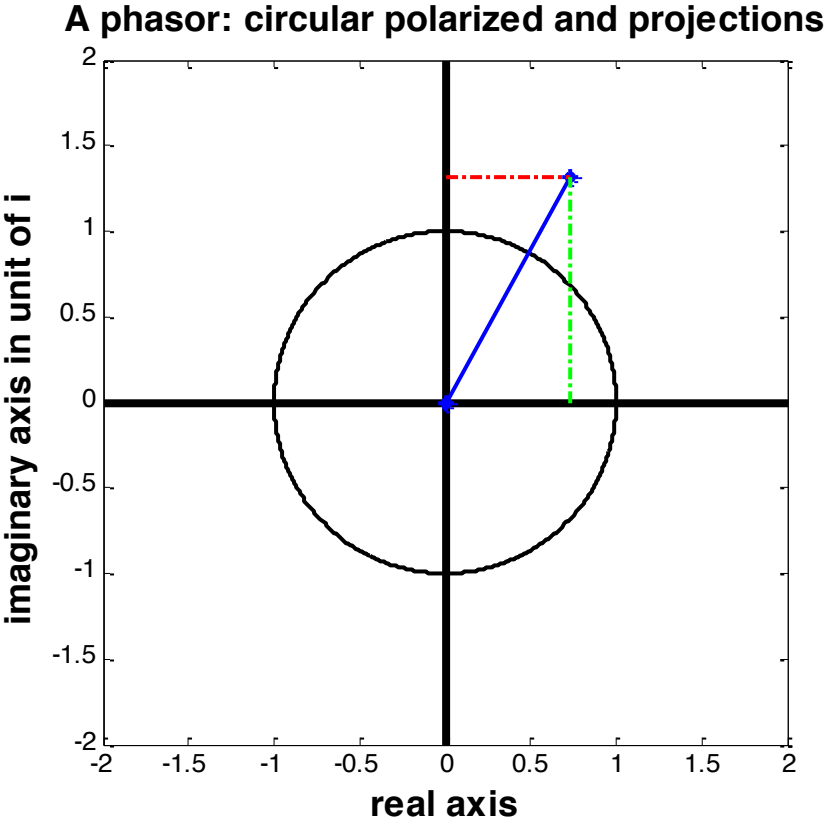


Fig.10

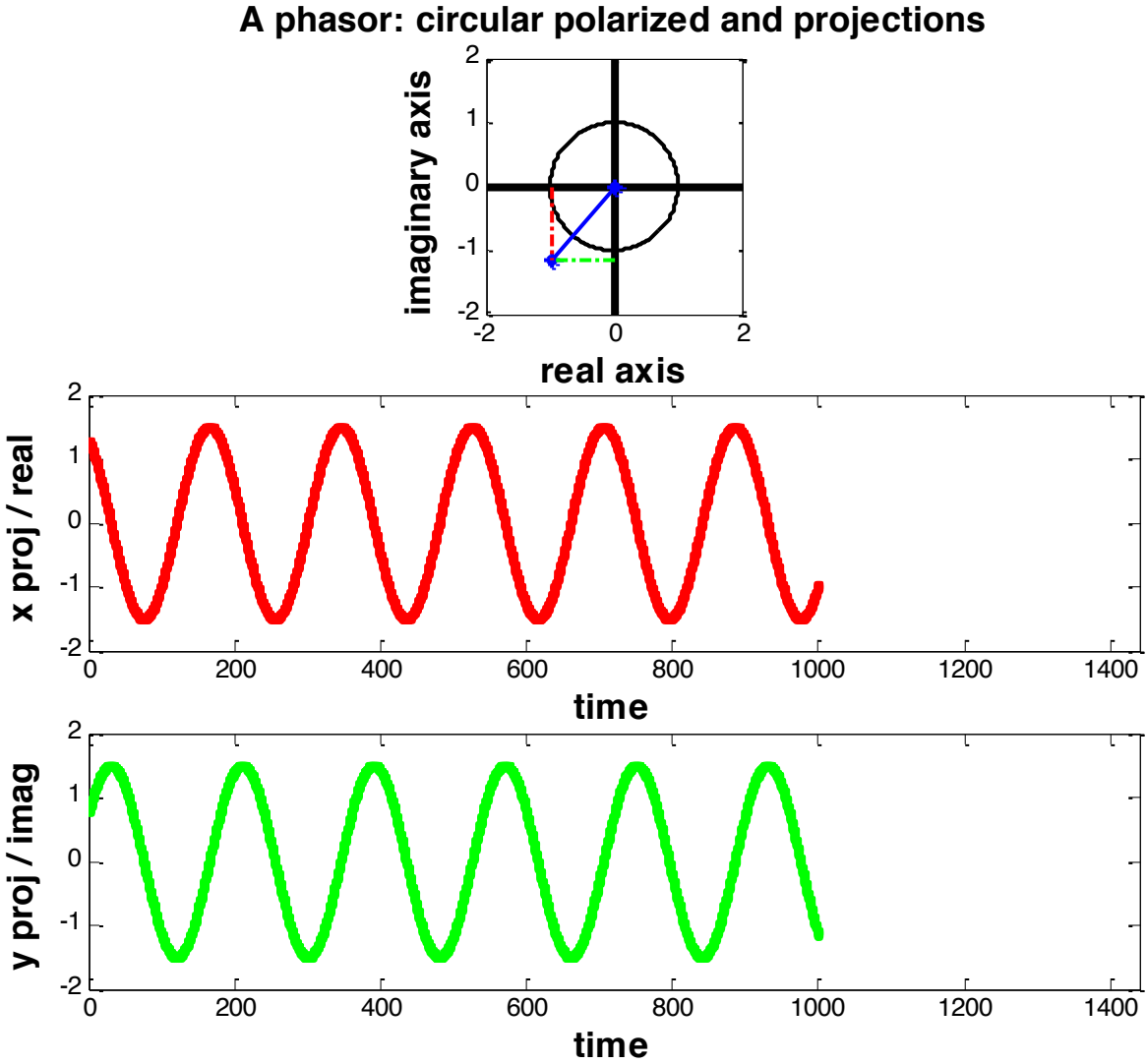


Fig.11

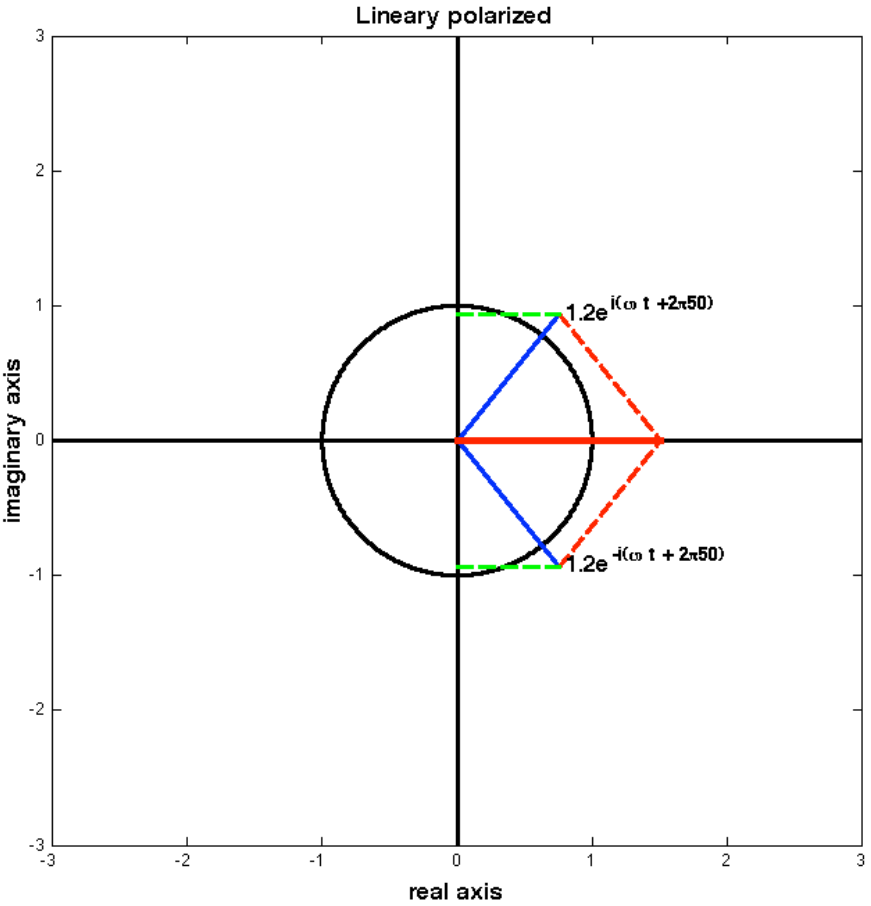
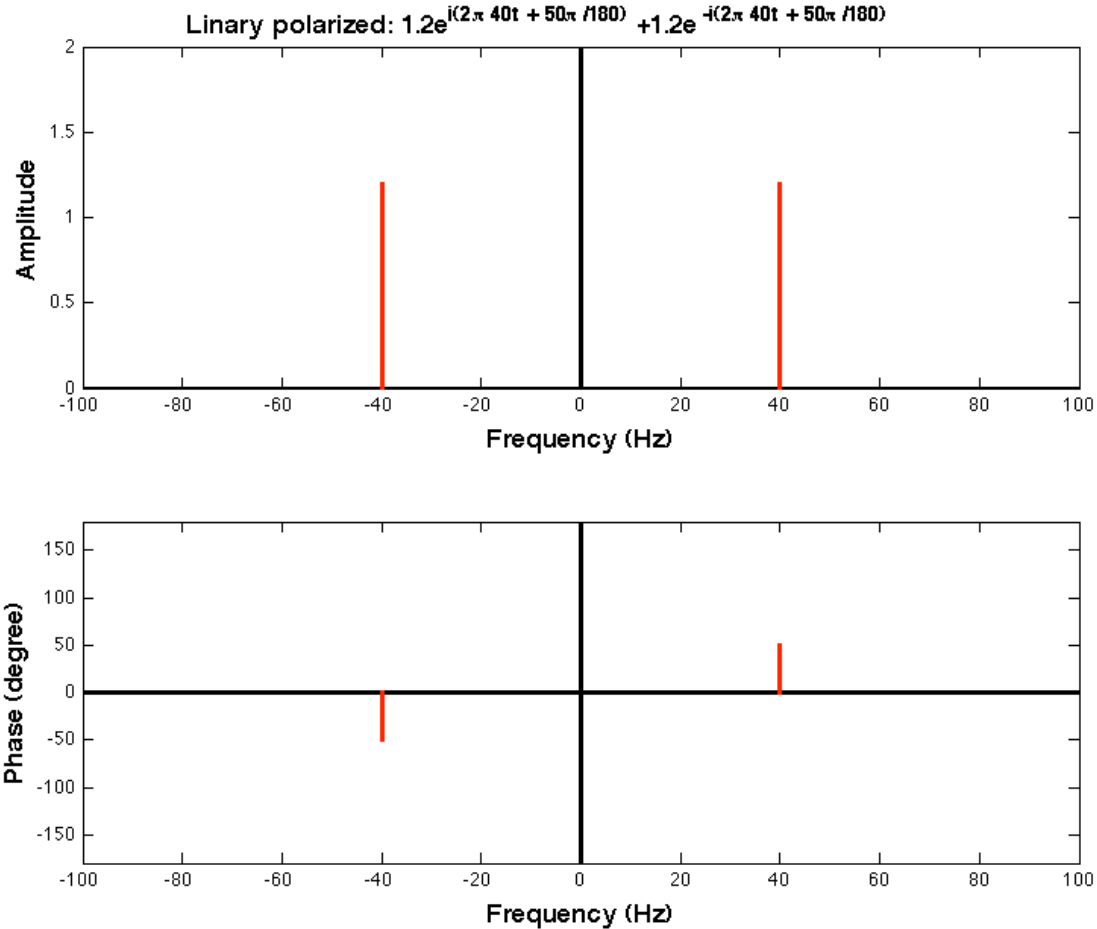


Fig.12



//

Fig.13

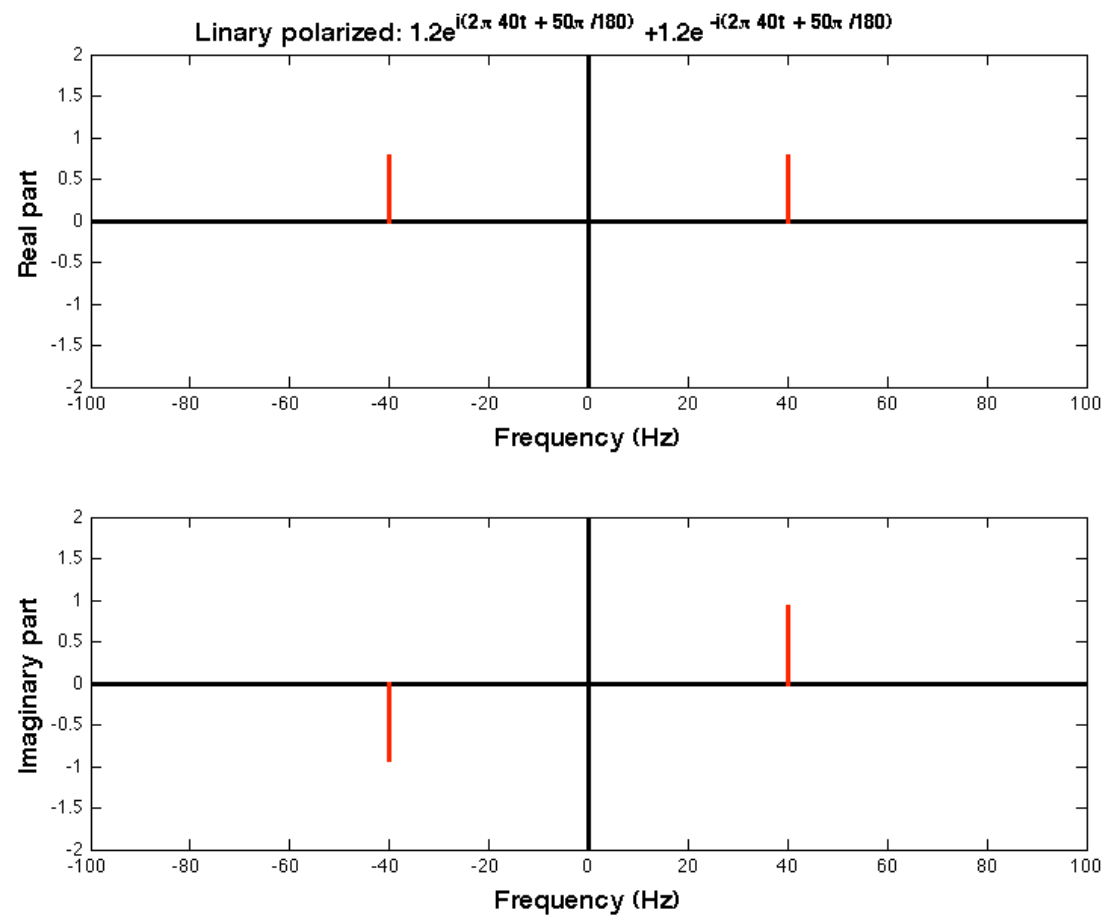


Fig.14_1

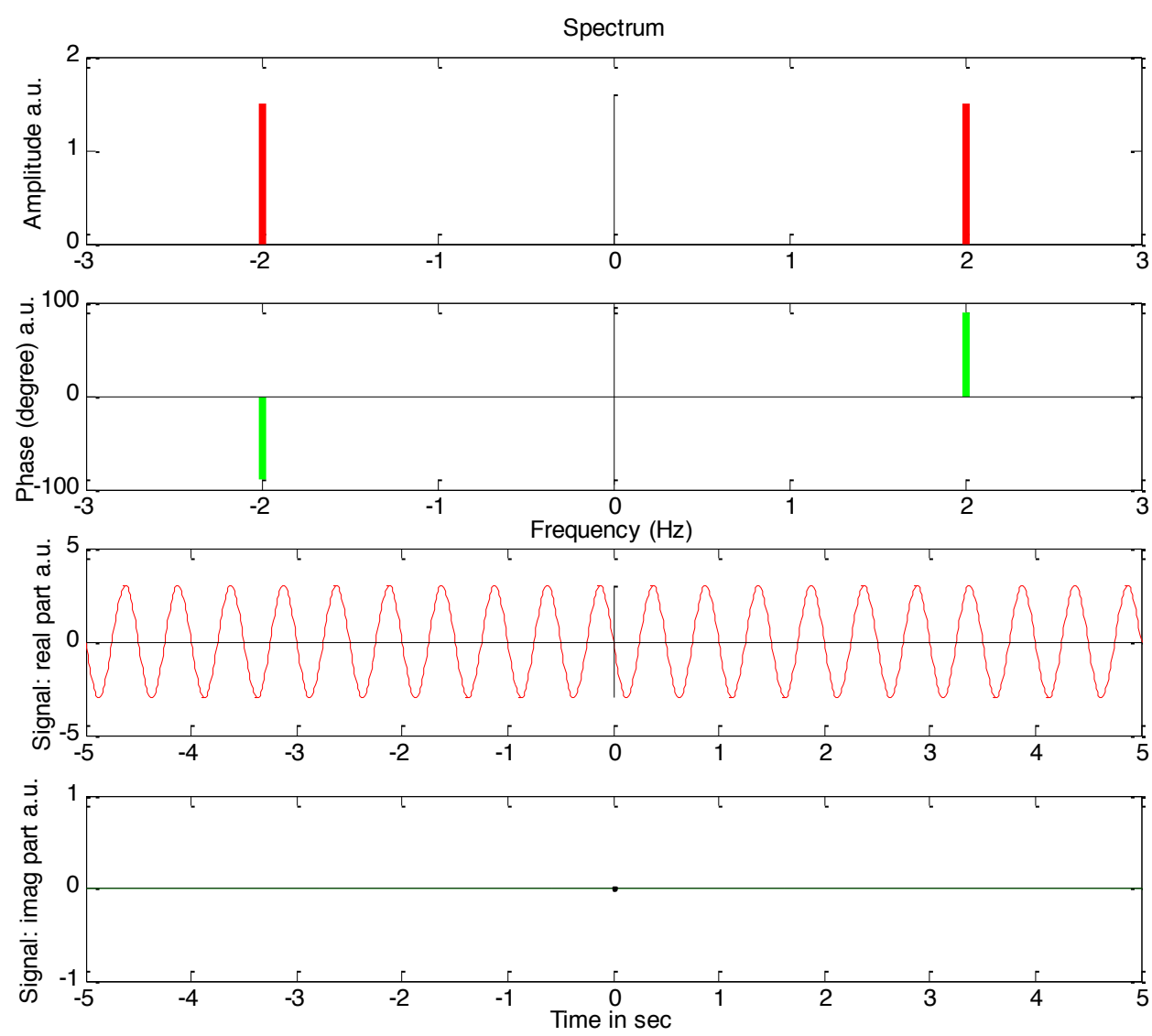


Fig.14_2

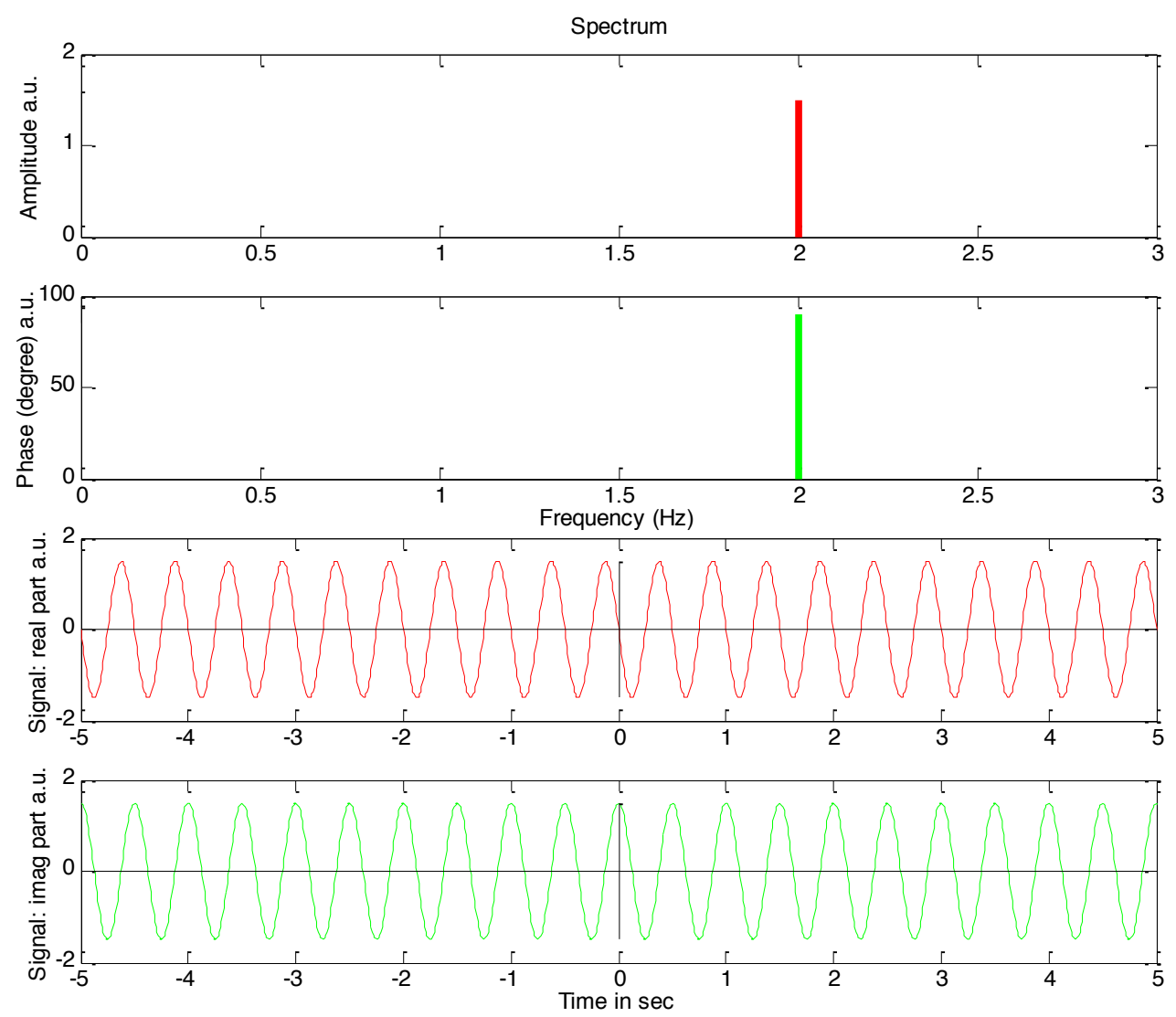


Fig.14_3

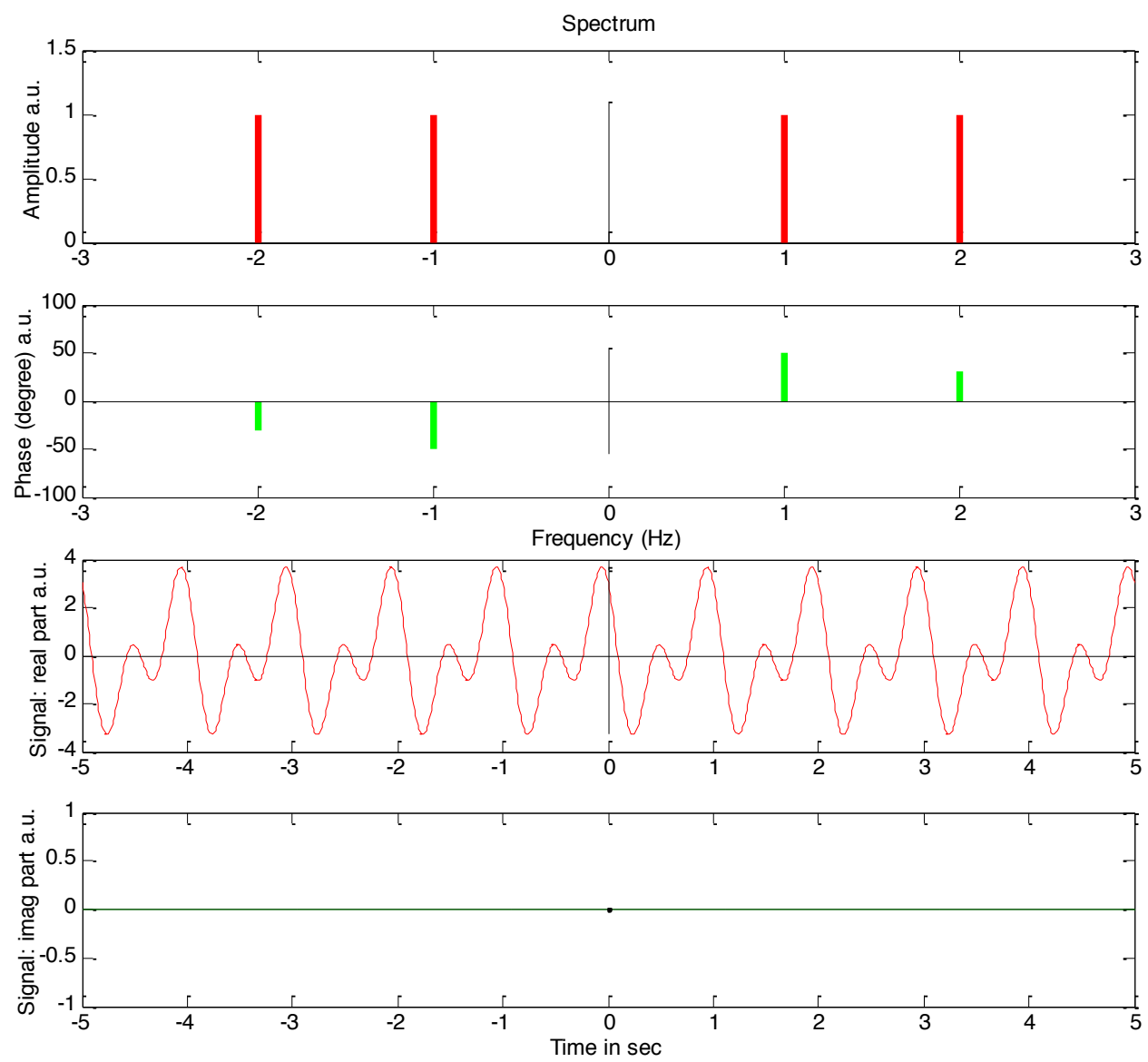


Fig.14_4

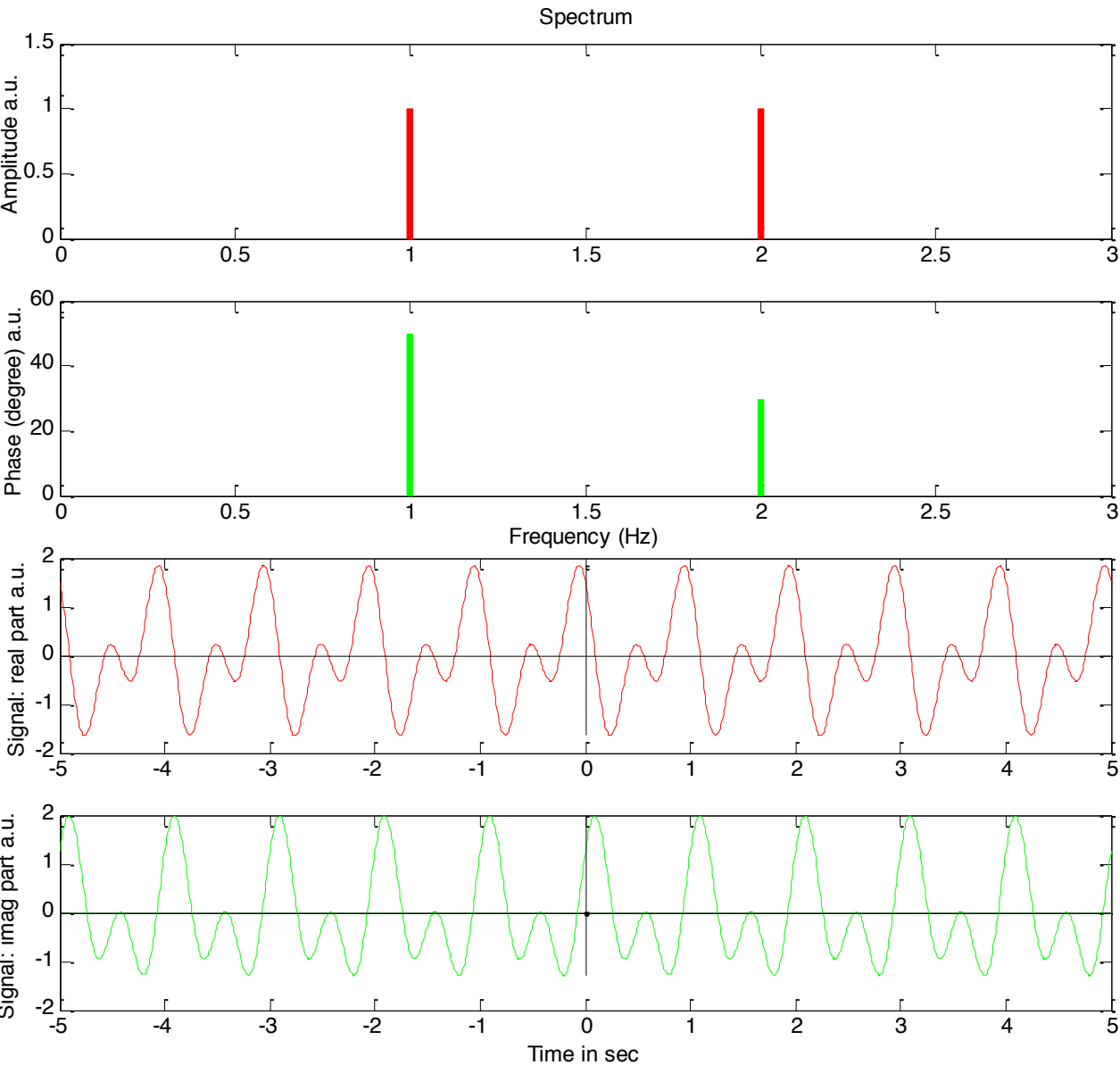


Fig.14_5

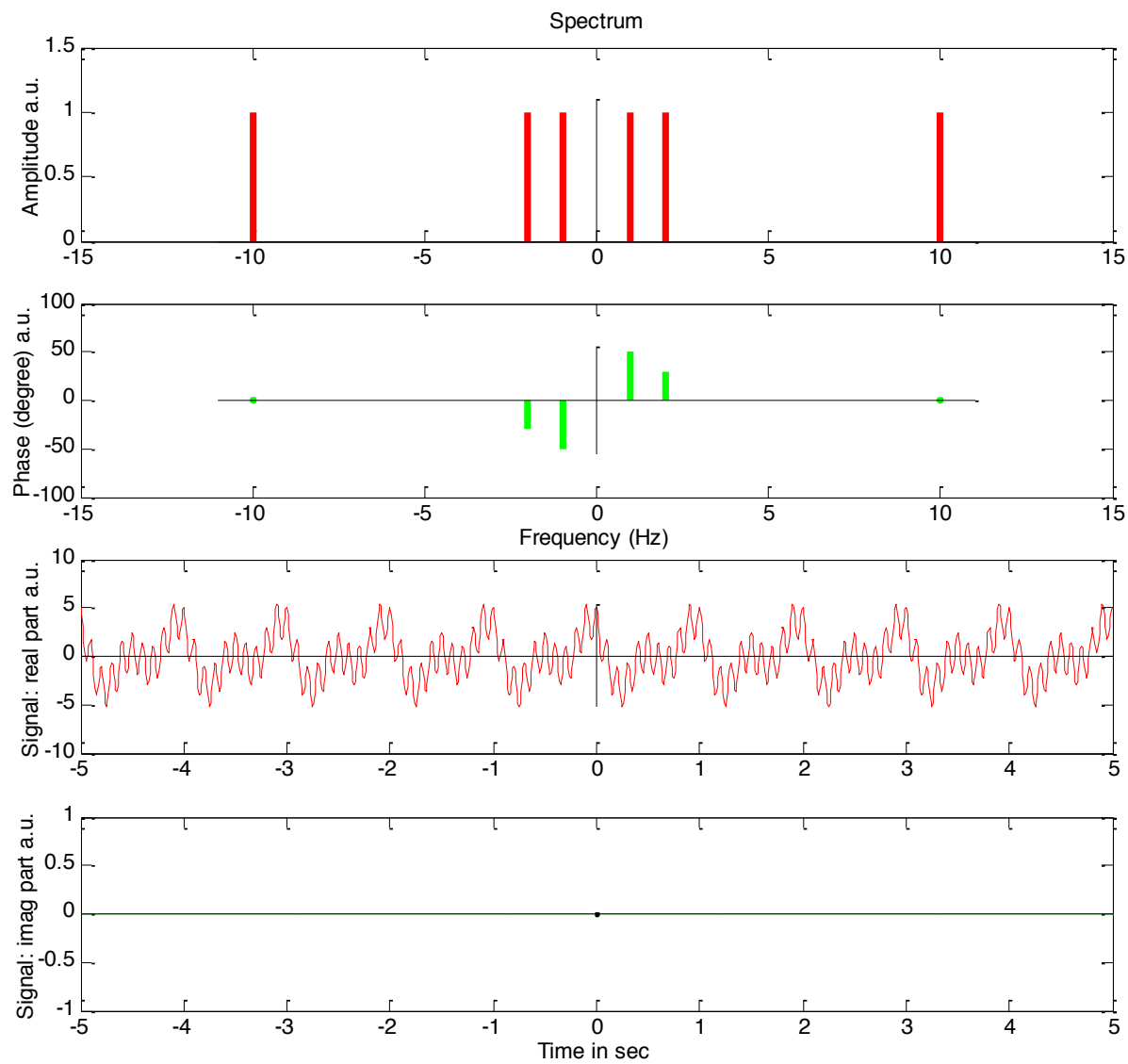
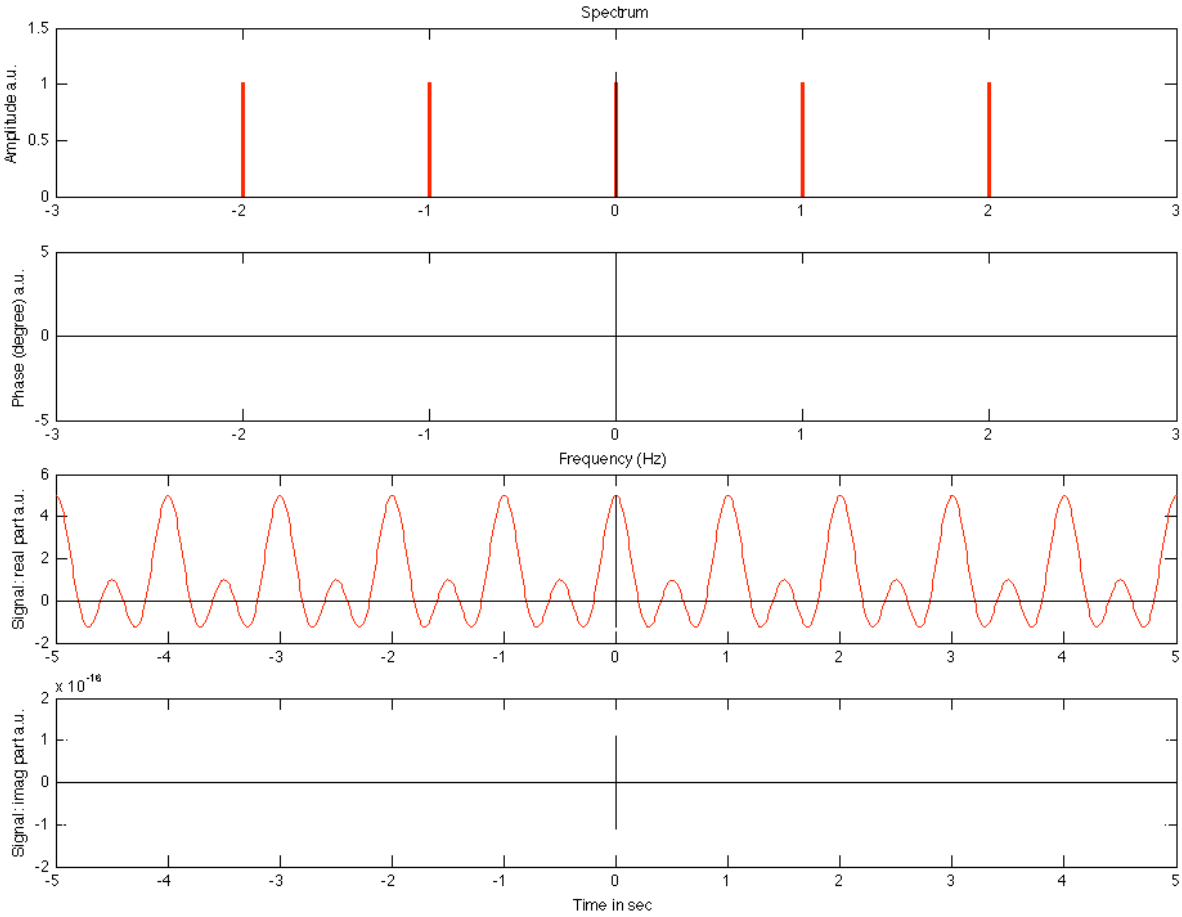
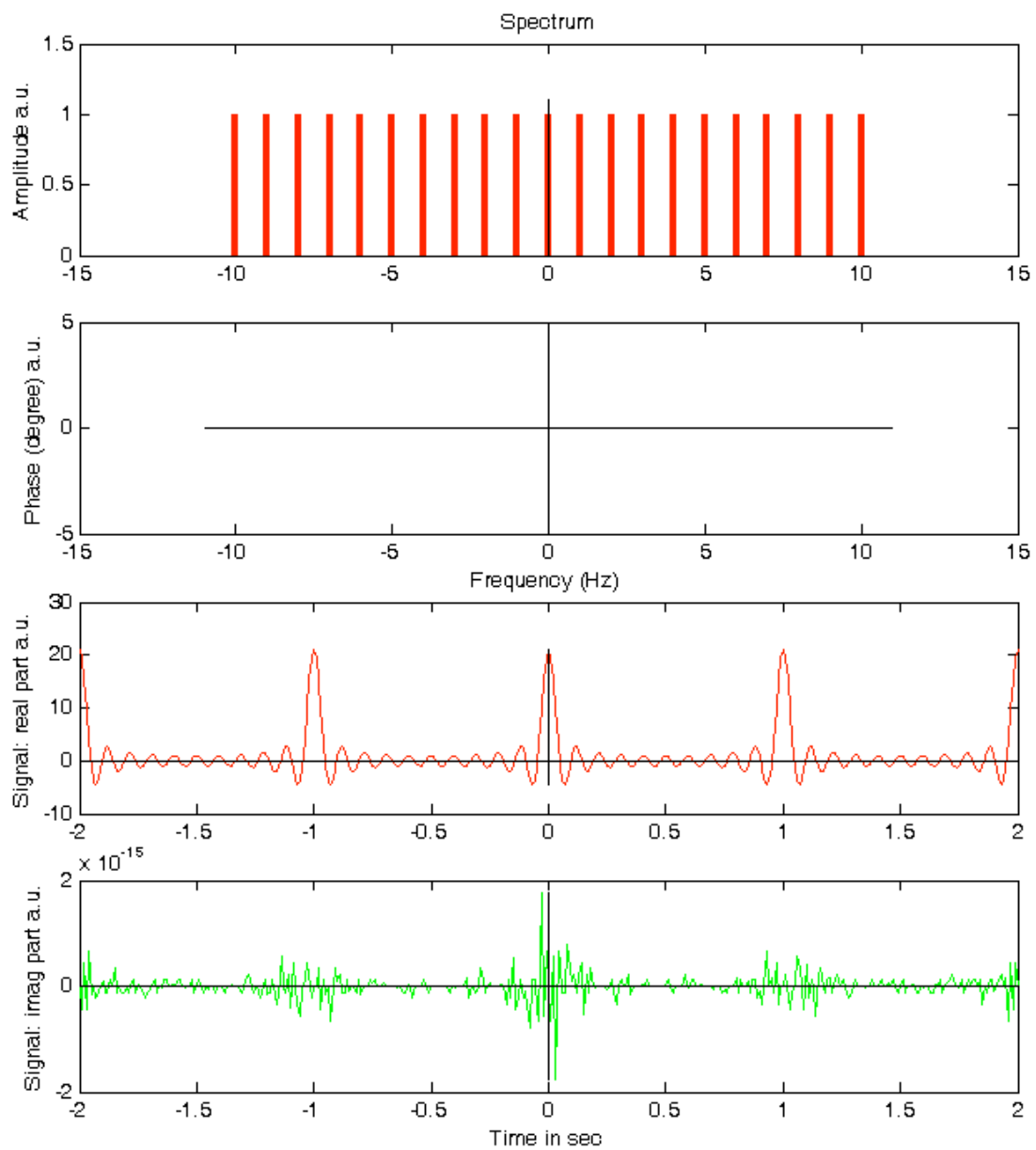


Fig.14_6



14_7



14_8

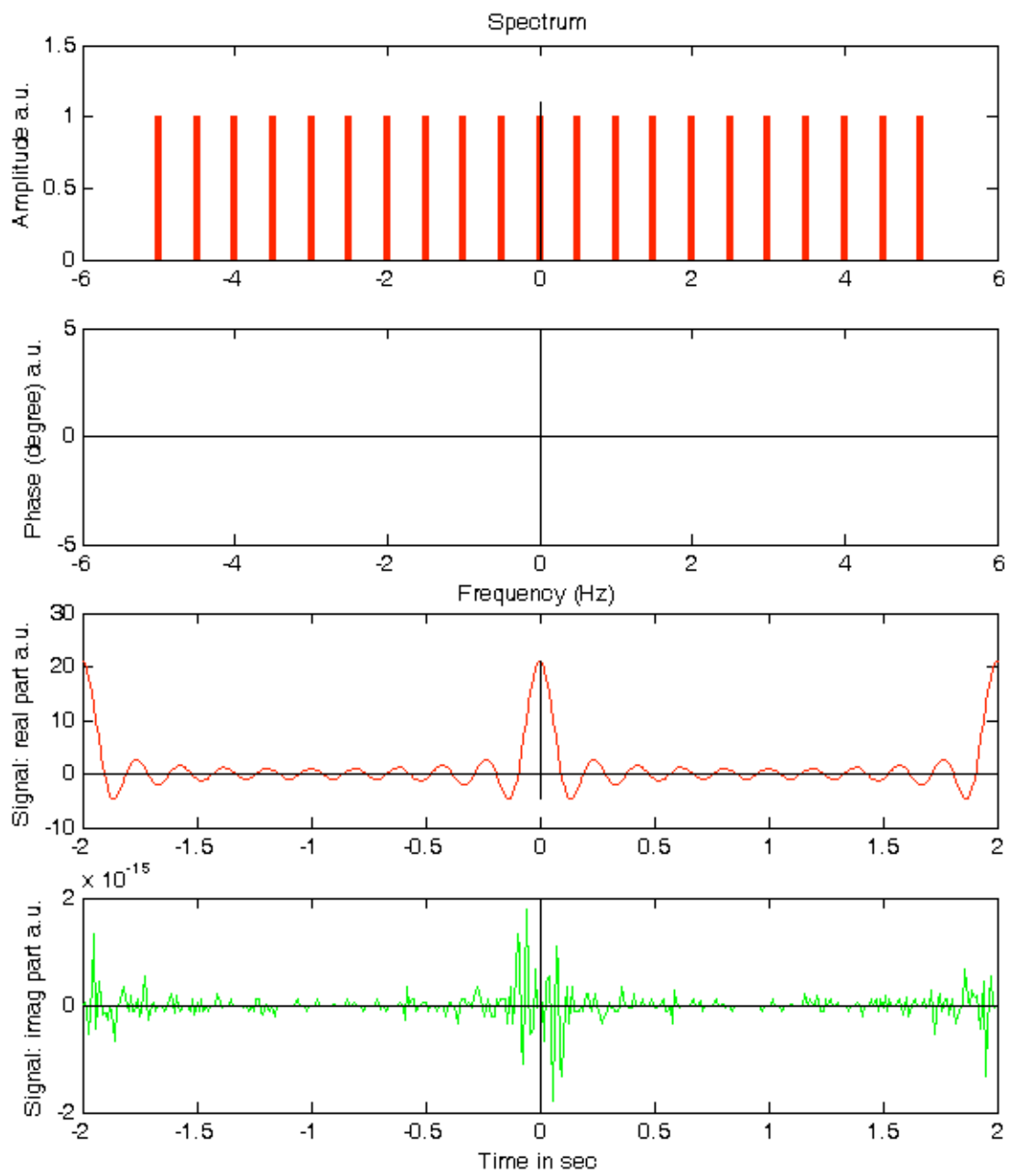


Fig.14_9

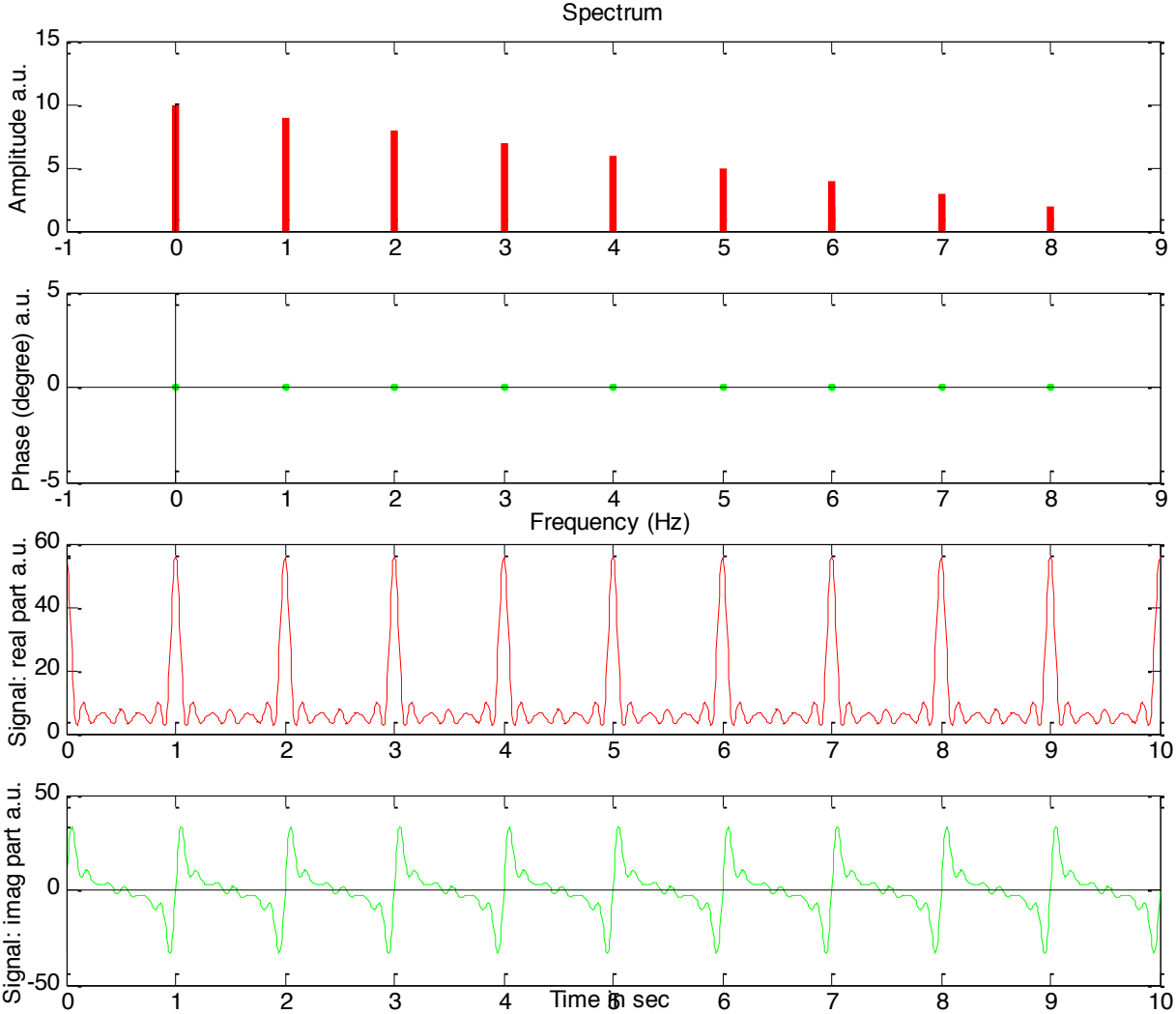


Fig.15

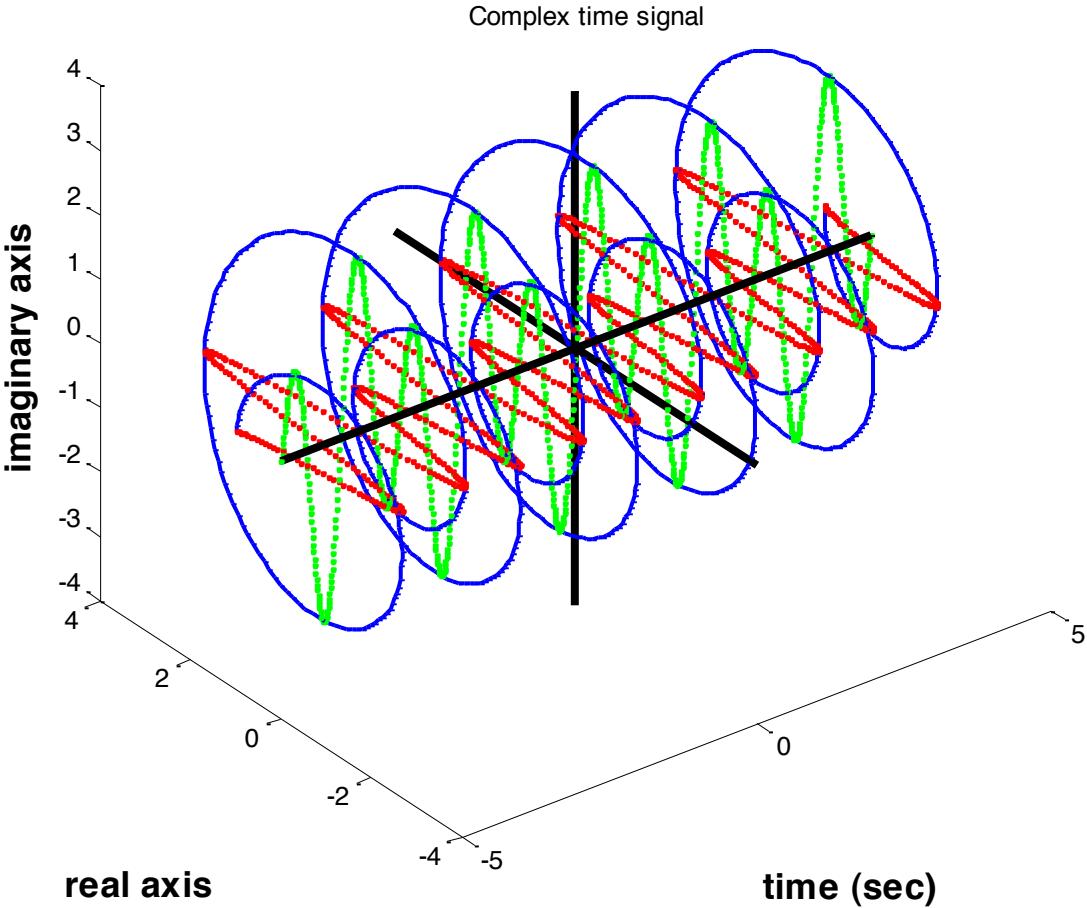


Fig.16

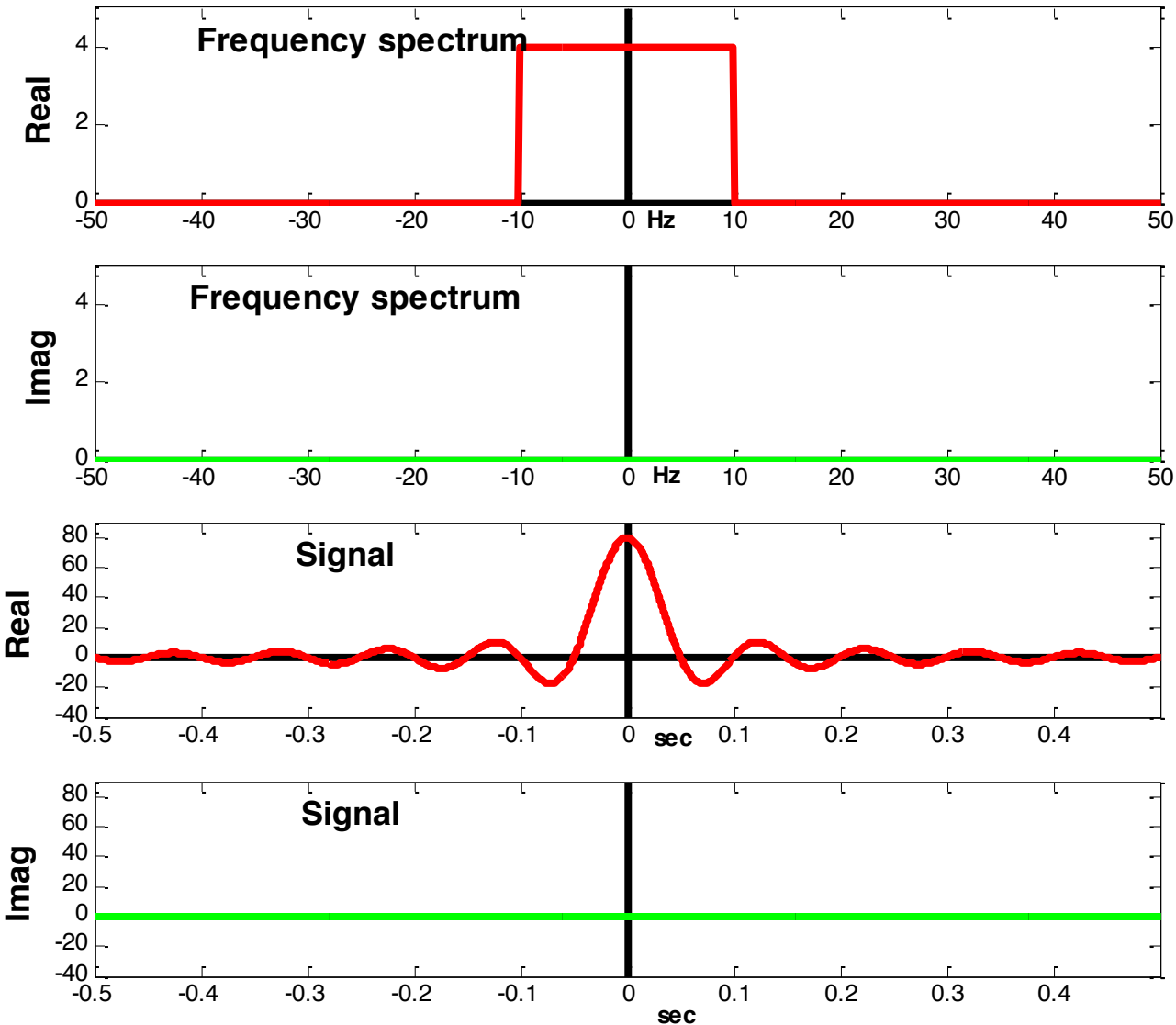
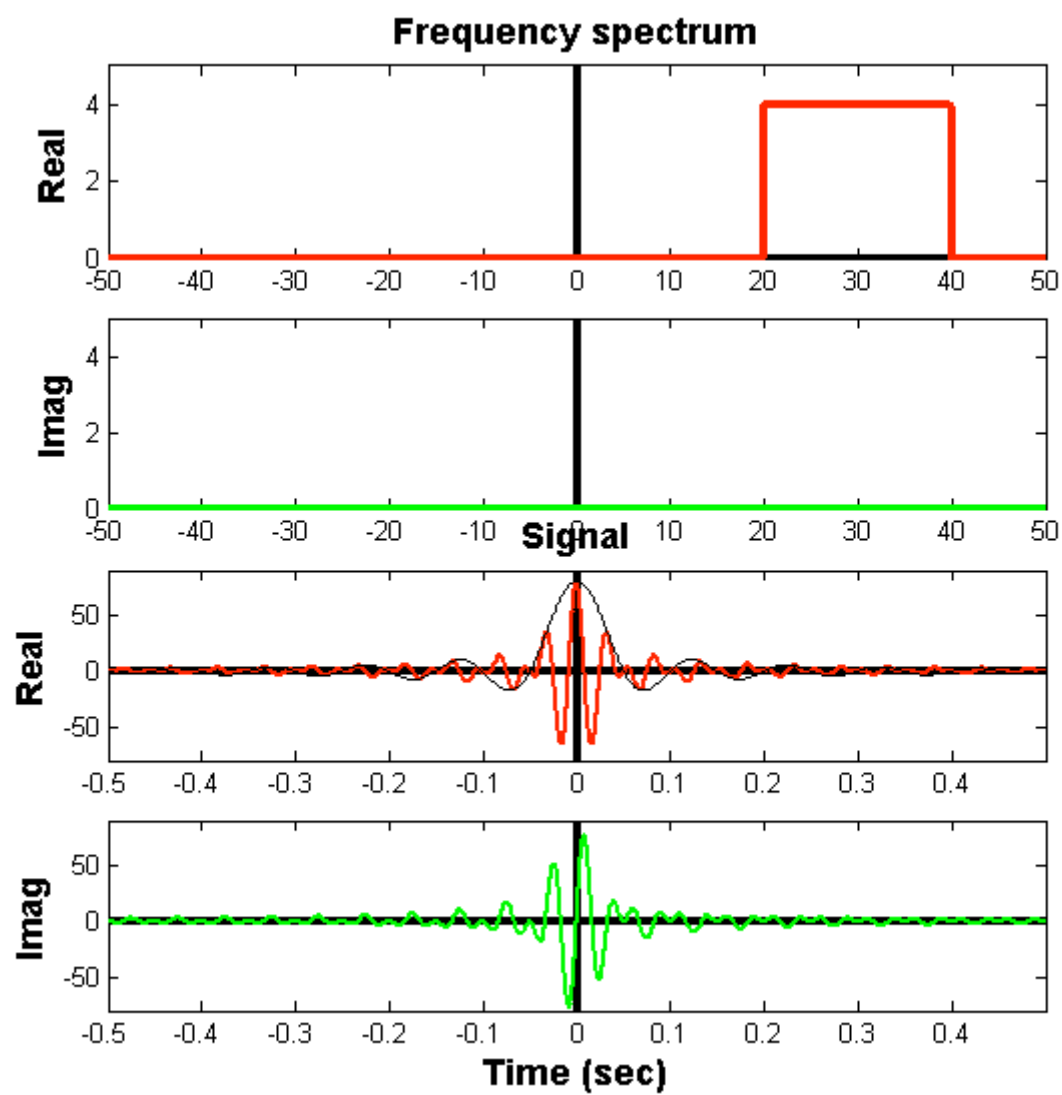
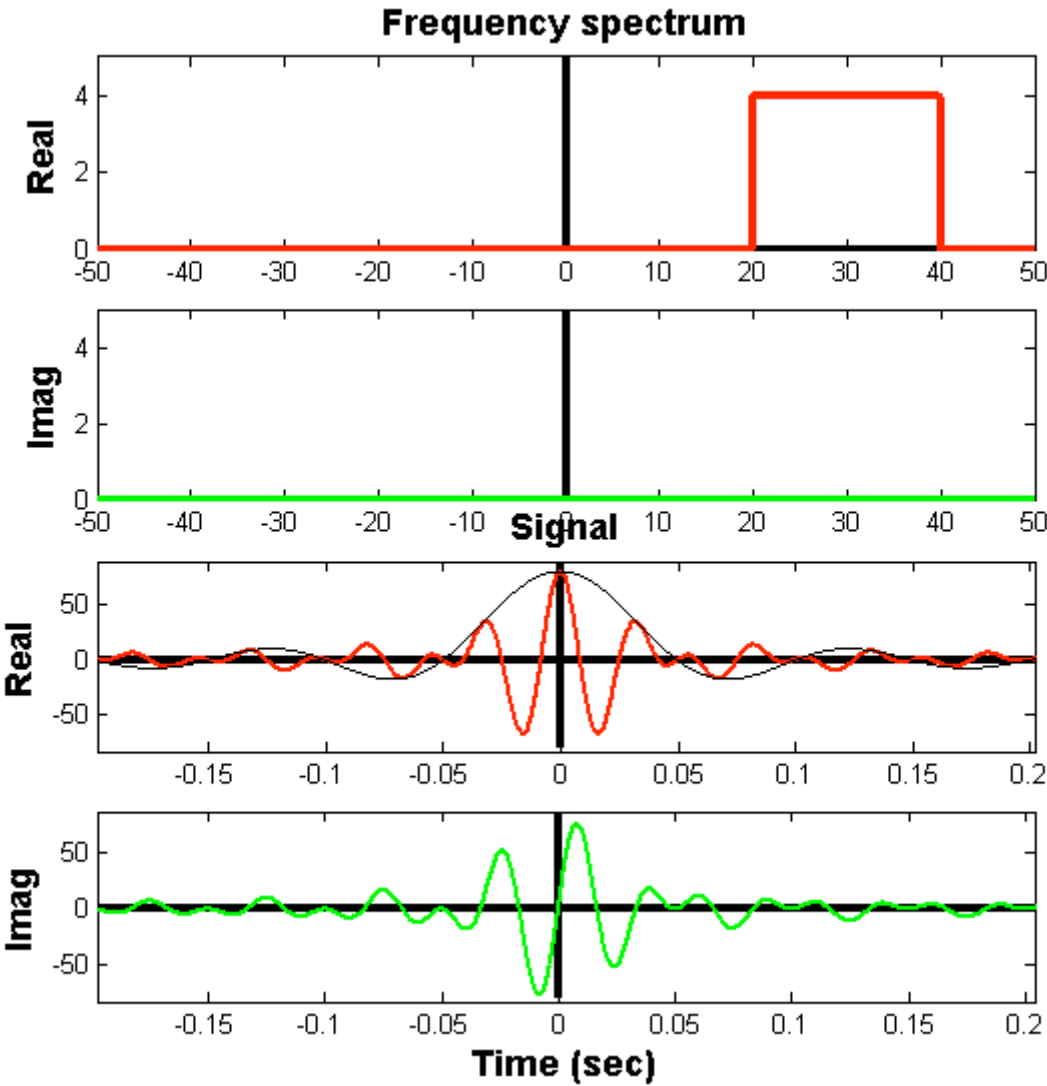


Fig.16_2



Figur 16_3



Figur 17

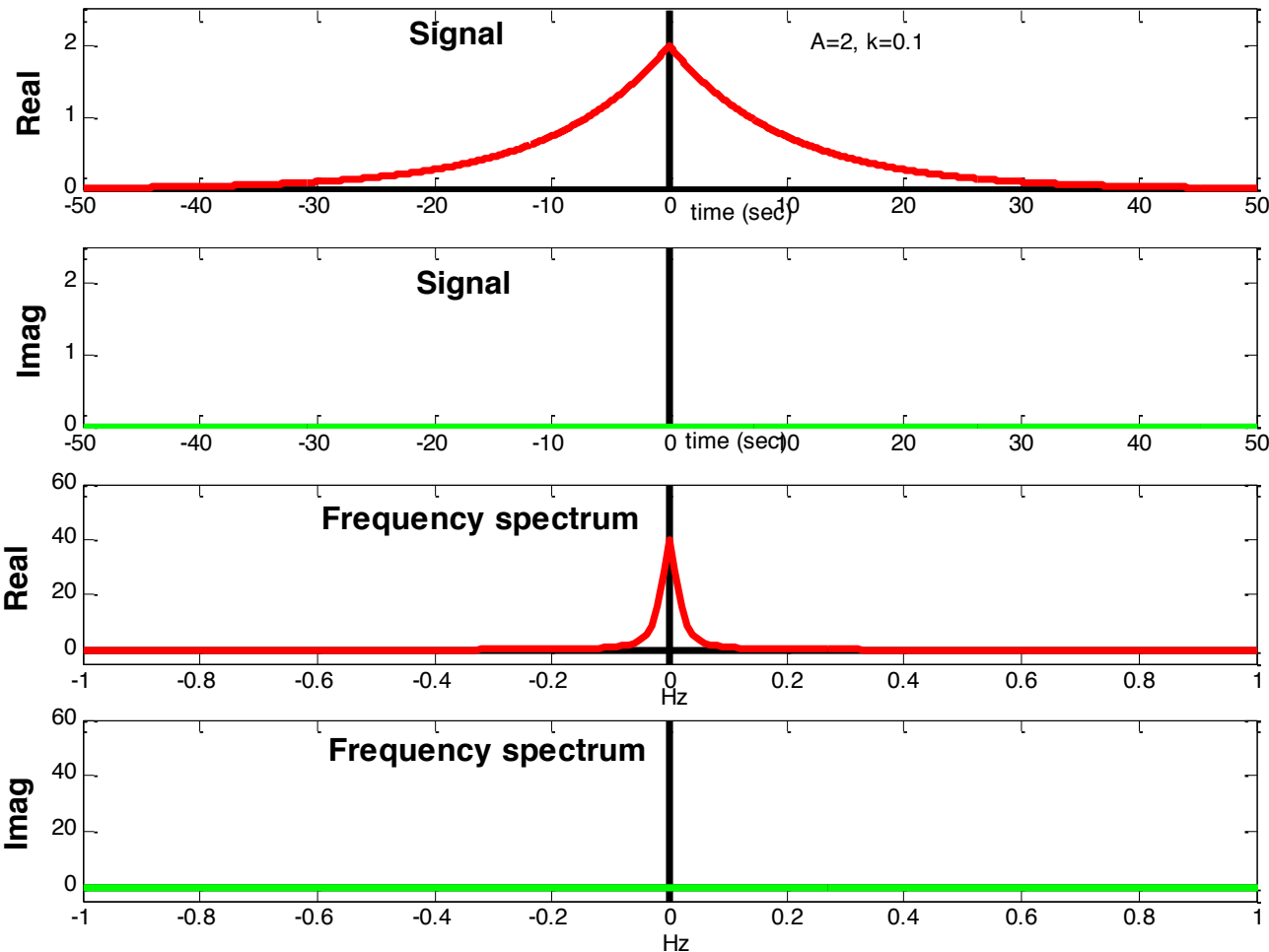


Fig.18

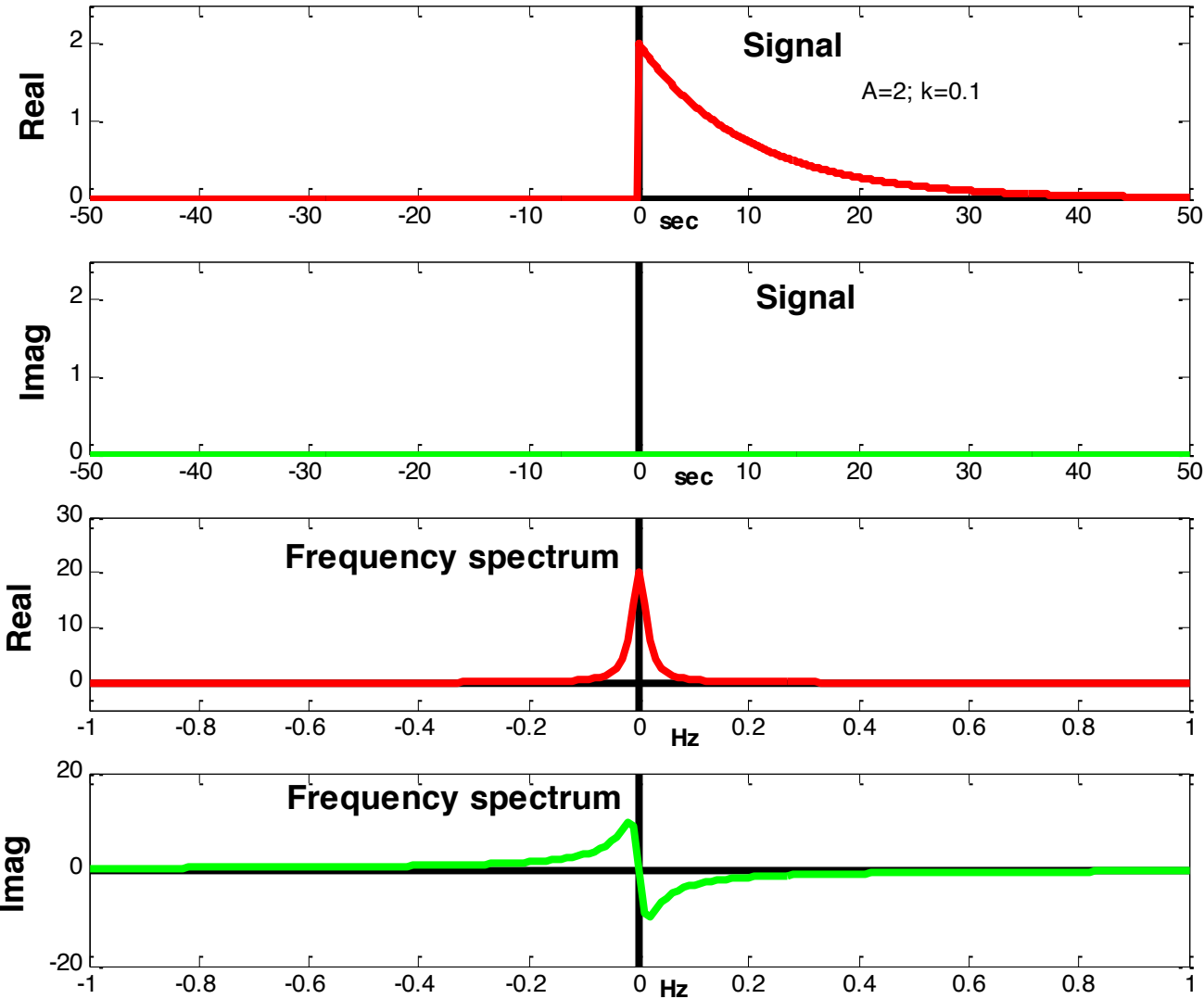


Fig.19

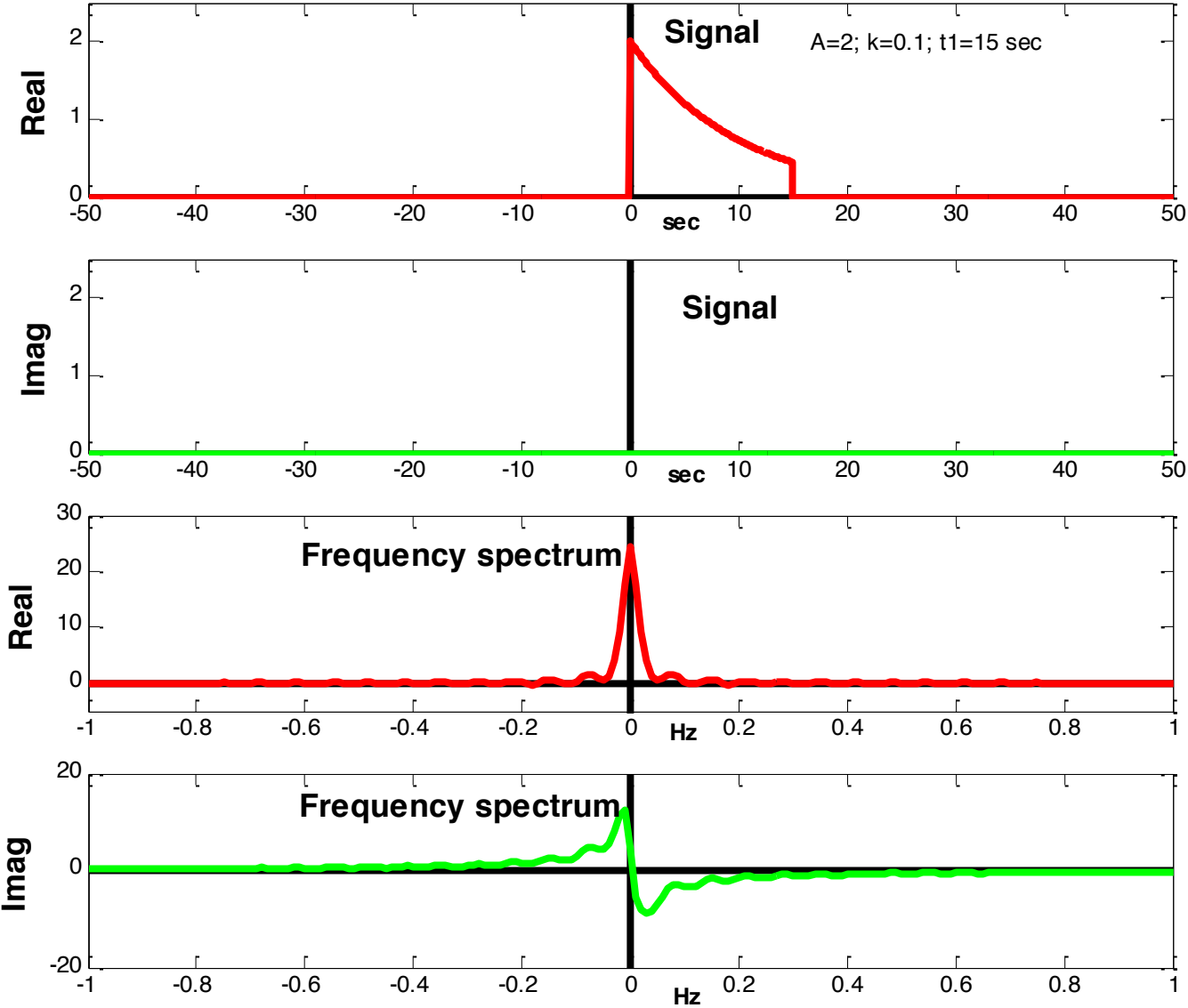


Fig.20

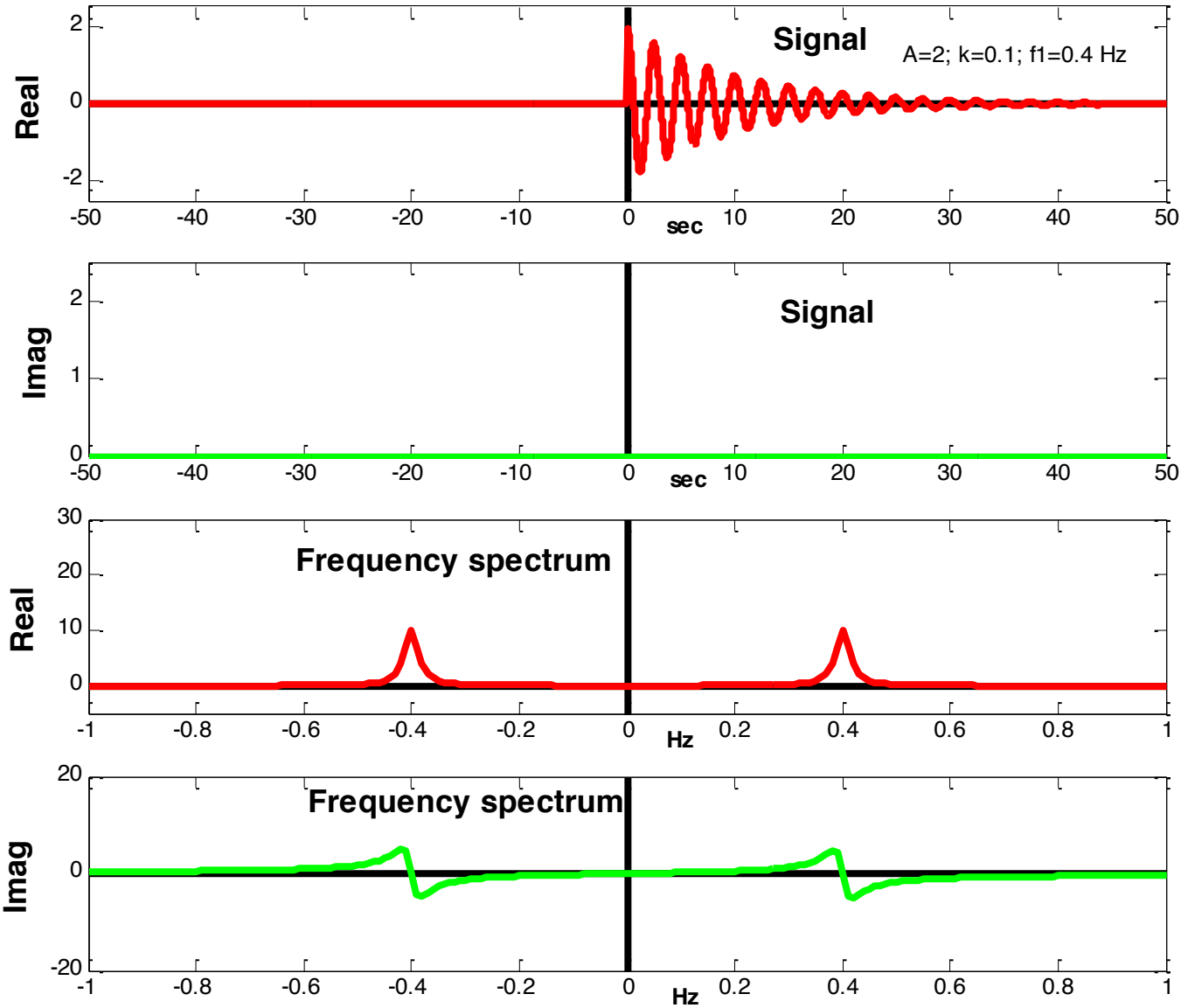
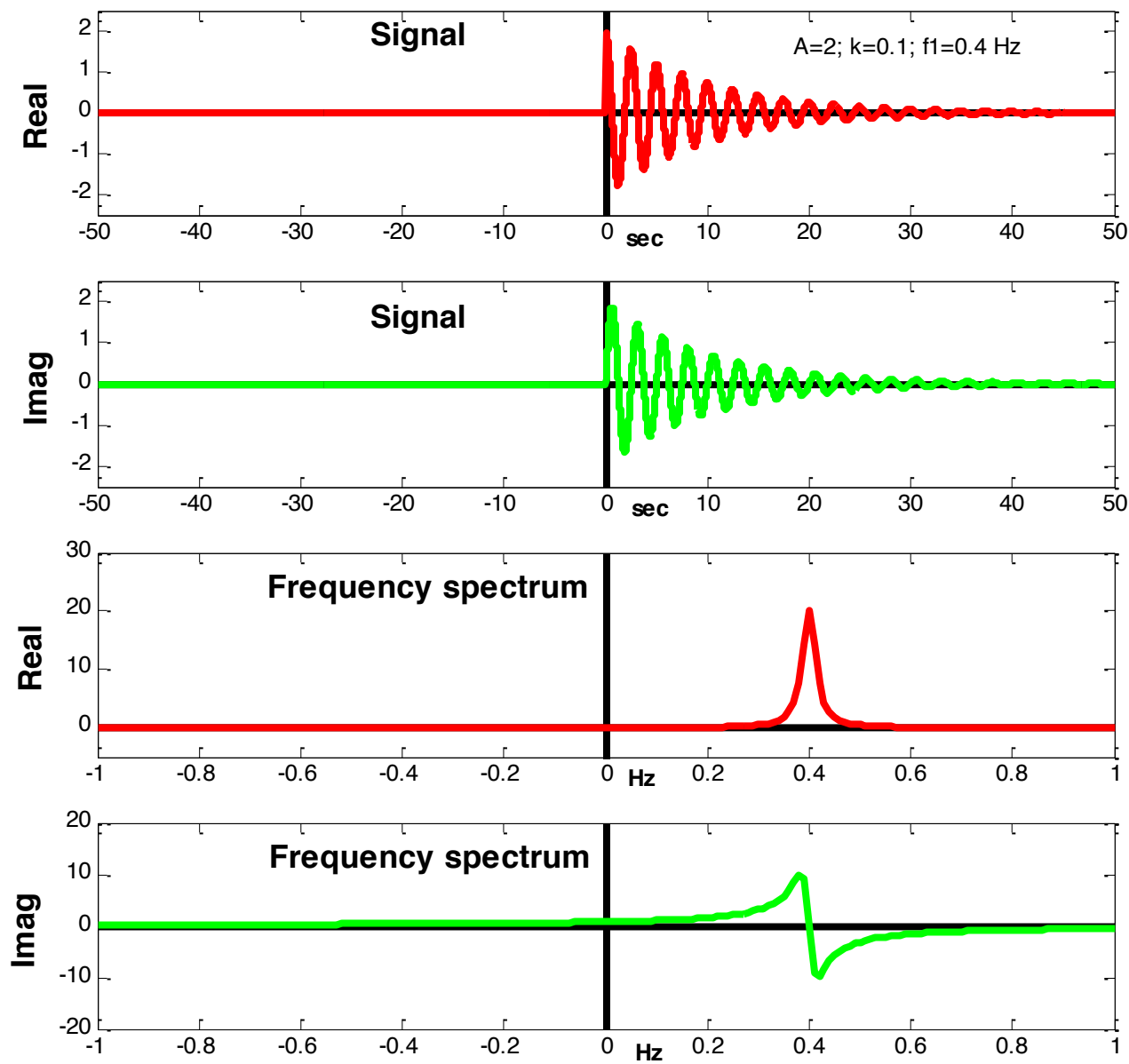
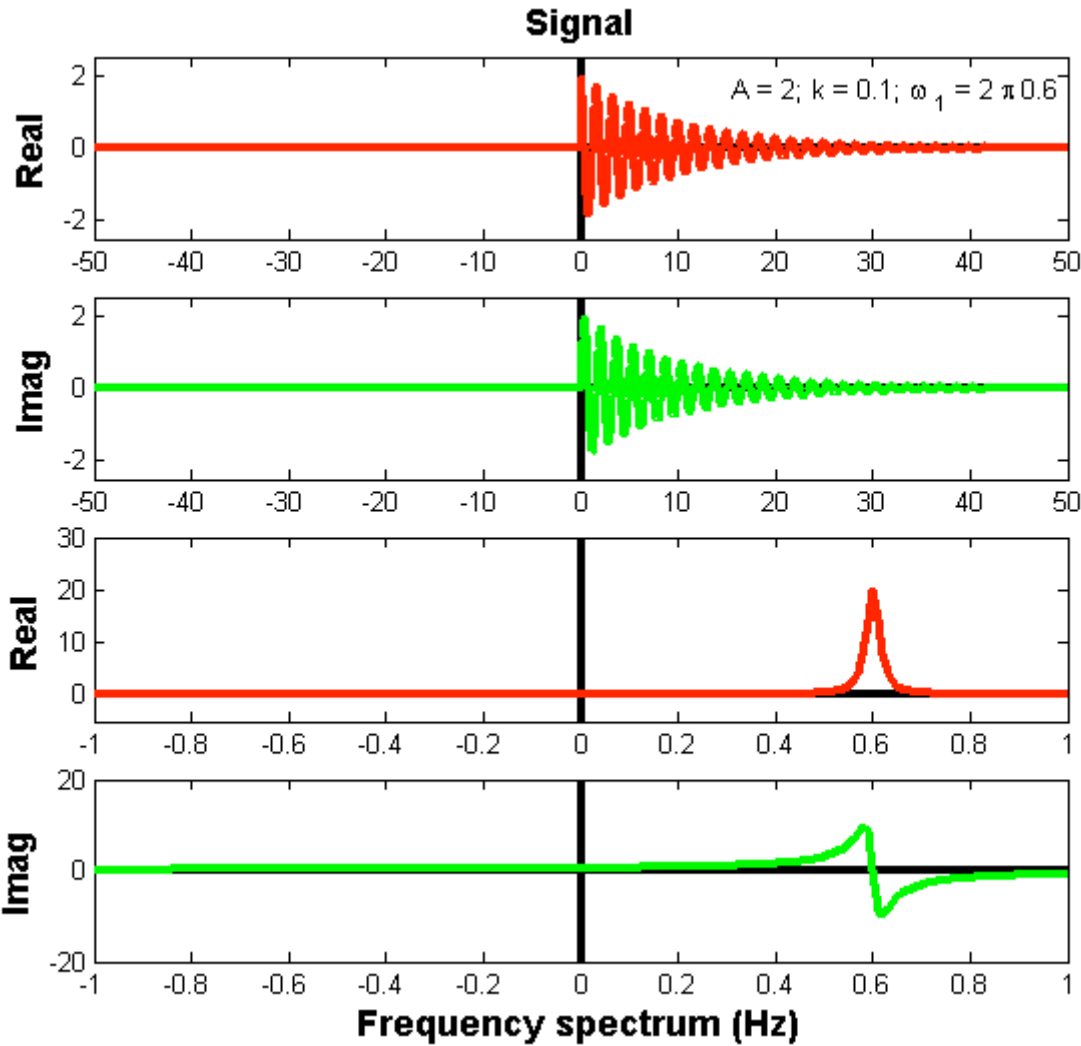


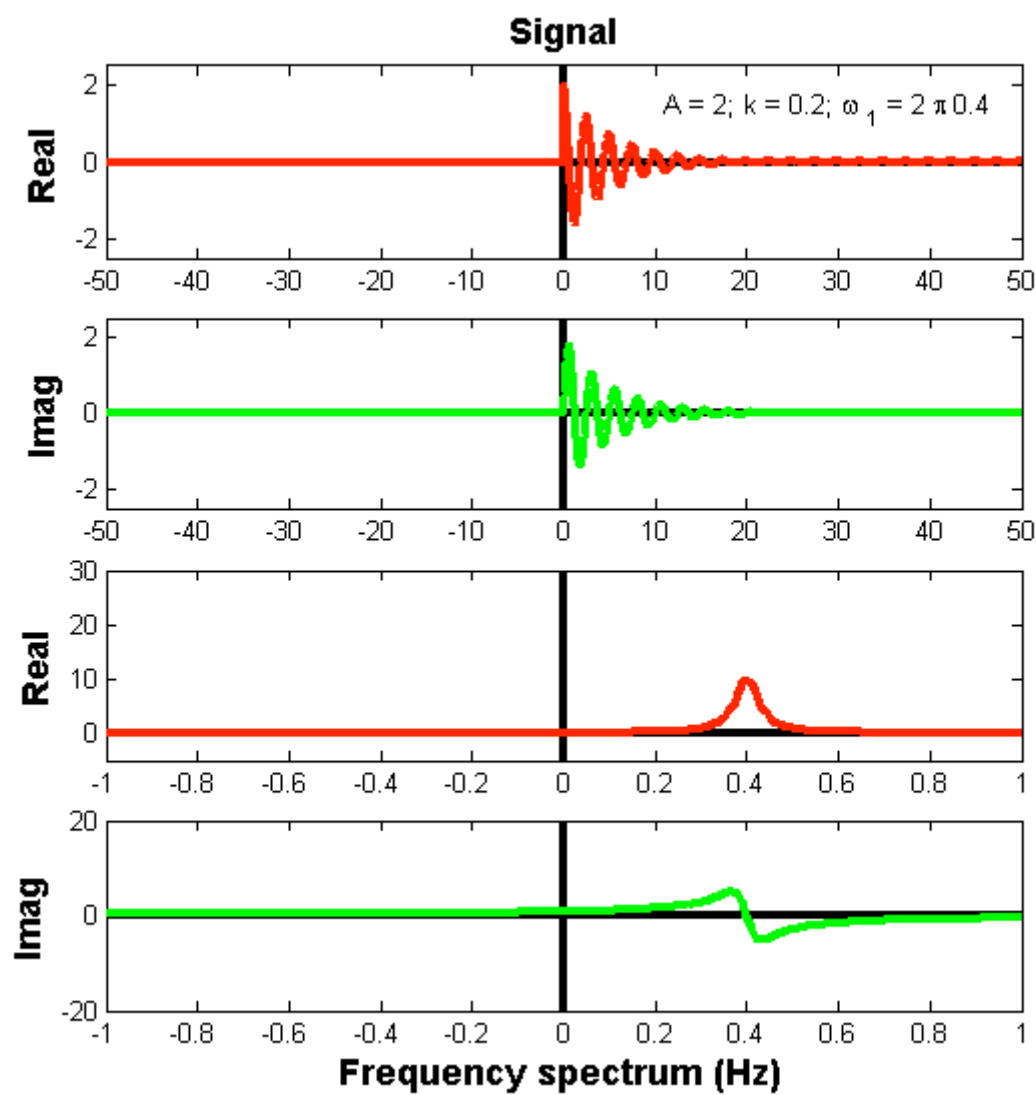
Fig.21



Figur 21_2



Figur 21_3



Foldning

Foldning er en matematisk process som benyttes blandt andet indenfor udglatning af billeder og indefor tracerkinetikken f.eks ved beregning af perfusion. Foldning hedder på engelsk "convolution" og har efterhånden sneget sig ind i vort sprogbrug. Man møder også begreberne affoldning og tilsvarende "deconvolution".

Vi vil tage udgangspunkt i en midlingsproces af et signal. I fig.22 er vist signal værdier som funktion af x (x kan være en rumlig position eller en tids variabel). Vi ønsker nu at glatte signalet ud, svarende til at støjen ønskes reduceret. Vi kan da vælge at tage middelværdien af hvert trippelpar, altså værdien for $x = 5,6,7$, som har funktionsværdierne henholdsvis 2,4,7. Vi tilordner denne værdi positionen $x=6$. Så for denne position afsætter vi den nye funktionsværdi $1/3(2+4+7) = 4.33$. Vi gentager så dette for $x=6,7,8$ som har funktionsværdierne henholdsvis 4,7,1 og får den nye funktionsværdi som $1/3(4+7+1) = 4$ som afsættes svarende til $x = 7$, se fig.22. Sådan fortsættes for alle tripelpar. Som man kan se er man lidt i et dilemma med yderpunkterne, hvor man bliver nød til at foretage et valg, som kan være ikke at gøre noget eller inddrage de omkringliggende 0 værdier. Der er ingen "rigtig" løsning på dette problem.

Vi ønsker nu at bringe ovenstående på en matematisk formel. I det følgende får vi brug for at gøre os klart at vis vi betragter funktionen $f(x)$ så betyder $f(x-k)$, $k > 0$, at funktionen rykker k enheder til *højre*, og $f(x+k)$ betyder at funktionen rykker k enheder til *venstre*, og $f(-x)$ er en spejling af funktionen omkring y -aksen, og funktionen $f(-(x-k)) = f(k-x)$ er den spejlede funktion rykket k enheder til *højre*. For en orden skyld skal nævnes at funktionen $f(x) + k$, betyder at funktionen løftes med k enheder og at funktionen $f(x) - k$, betyder at funktionen rykker k enheder ned.

Ovenstående er et eksempel på et firkantfilter med højden $1/3$ og længden 3 (x -enheder), dvs at arealet netop er 1. Havde arealet af filteret været større eller mindre end 1 havde man øget henholdsvis mindsket energien i signalet, og det er ikke ønskeligt. Hvis man nu forestiller sig at man havde en dobbelt så tæt sampling langs x -aksen, altså værdier for $x = 5.0, 5.5, 6.0, 6.5, 7.0, 7.5, 8.0, 8.5$ ect, så skal ovenstående filtrering også være mulig, se fig.23_1. Gennemsnit svarende til $x = 6.0$ fås: $1/3(f(5.0) + f(5.5) + f(6.0) + f(6.5) + f(7.0)) = 1/3(2 + 3 + 4 + 8 + 7) = 4.33$. Men her opdager man at arealet af filteret nu er $1/3 * 5 * 1/2 = 0.833$. Hvis man supplerer med en værdi til: $f(7.5)$ så bliver arealet: $1/3 * 6 * 1/2 = 1$. Det vil sige at vi har taget funktionsværdierne svarende til $x = 5.0, 5.5, 6.0, 6.5, 7.0, 7.5$, og det ses at samplings afstanden Δx (i dette tilfælde lig $1/2$) indgår som en slags normaliserings faktor. Men tilordningen til $x = 6.0$ er nu ikke logisk men det vil være mere rimeligt at tilordne til midten af x intervallet $5.0 - 7.5$ altså 6.25 . I praksis vil man dog alligevel tilordne til 6.0 eller 6.5 , da dette ikke har stor betydning og fordi det er lettere at implementere på en computer.

Kan vi bringe dette på en formel?

Vi tegner først filtret symmetrisk omkring $x=0$ som vist i fig.23_1. Vi betegner filter funktionen $g(x)$ og i dette tilfælde er $g(x)=1/3$, for $-1.5 \leq x \leq 1.5$ og for $x < -1.5$ og $x > 1.5$ er $g(x) = 0$. Af grunde som vi skal komme tilbage til spejler vi først $g(x)$ omkring y -aksen og danner funktionen $g(-x)$. Denne funktion forskydes nu hen over den funktion $f(x)$ vi ønsker at filtrerer. Eksempelvis kan vi forskyde $g(-x)$ hen så svarer til $x = 6.5$: $g(-(x-6.5))=g(6.5-x)$, se fig. 23_5. Herefter multipliseres g med f søjlevis og summeres og tilordne den nye værdi $x = 6.5$. Det ser således ud på formel:

$$\begin{aligned}
F(6.5) &= \sum_{x=5.0}^{7.5} g(6.5-x)f(x)\Delta x = \\
&g(1.5)f(5.0)\Delta x + g(1.0)f(5.5)\Delta x + g(0.5)f(6.0)\Delta x + \\
&g(0)f(6.5)\Delta x + g(-0.5)f(7.0)\Delta x + g(-1.0)f(7.5)\Delta x = \\
&1/3 * 2 * 1/2 + 1/3 * 3 * 1/2 + 1/3 * 4 * 1/2 + 1/3 * 8 * 1/2 + 1/3 * 7 * 1/2 + 1/3 * 5 * 1/2 = 4.83
\end{aligned}$$

Egentlig kunne vi godt have skrevet:

$$F(6.5) = \sum_{-\infty}^{\infty} g(6.5-x)f(x)\Delta x$$

fordi funktionen g er 0 for $x > 1.5$ og $x < -1.5$. Funktionen F er nu en ny funktion, og er altså det resultat man får ved at midle eller filtrere f med g i punktet 6.5. Generelt kan vi nu skrive:

$$F(X) = \sum_{-\infty}^{\infty} g(X-x)f(x)\Delta x$$

Nu har vi bragt ovenstående på en formel, som dog er diskret. F(X) beregnet for X i intervallet -5 til 20 er vist i fig.23_6. Sidste step består i at man gør inddelingen finere og finere, hvorved sumtegnet ændres til et integral og Δx ændres til dx , og funktionerne f og g bliver nu til kontinuerte funktioner:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X-x)f(x)dx$$

Vi har således skabt en ny funktion, F(X), og vi lader nu X gennemløbe hele det interval vi er interesseret i. For hver værdi af X udregner man så foldningsintegralet. Vi siger at g foldes med f og resultatet er en ny funktion: F(X), en kort skrive måde er blot $F = g \oplus f$. Udtrykket for foldning er symmetrisk således at man ligesågodt kan skrive:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(X-x)dx$$

hvilket indses ved substitution : $s = X-x$ medfører $x = X-s$, $ds = -dx$ og når x er minus er s positiv og når x er positiv er s negativ hvorved integrationsgrænserne bytter:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)f(X-s)(-ds) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)f(X-s)ds$$

Et opsummering af foldnings integralet, nu som funktion af tid, t , er vist i fig.24. Vi vil folde de to funktioner f og g . Det foldede output kalder vi O . Næste step består i en spejling af den ene funktion, hvilken vi vælger er uden betydning, her vælger vi g , se fig.24_2. Vi kan forskyde den spejlede funktion $g(-t)$ ved at ændre på T som vist i Fig.24_3. Næste step består i at vi for enhver værdi af T , multiplicerer de to funktioner f og g . Dette er vist som den grønne kurve i Fig.24_4, for forskellige forskydninger (forskellige værdier af T). Sidste step består i at for enhver værdi af T , integrerer vi over den grønne kurve: overlejringsintegralet. Dette er vist i Fig.24_5 og Fig.24_6. Bemærk at resultatet er en funktion O som er en funktion af T . Selve integrationen udføres med t som integrations variabel.

Vi vil nu indføre foldnings begrebet på en lidt anden måde som den indføres i system teori, og anvendes i mange sammenhænge. Vi tager udgangspunkt i måling af perfusion hvor foldningen et helt centralt element.

Vi forestiller os et system, som, når det får en impuls, responderer på denne impuls med et respons, som vi kalder et impulsrespons $g(t)$. Et eksempel: vi forestiller os at vi indgiver 1 mol kontraststofmolekyler ind i en afgrænset vævsmasse, eksempelvis 100g hjerne, til tiden $t = 0$. Funktionen $g(t)$ angiver da hvordan udvaskningsforløbet som funktion af tiden t ser ud, sådan som man ville kunne måle den med en ekstern måle metode, eks gamma kamera eller en MR skanner (hvis man kunne indgive 1 mol momentant i et sådan væv). Funktionen $g(t)$ er normaliseret og betegner den fraktion der resterer i systemet (vævet) som funktion af tiden t . $g(t)$ er 0 for $t < 0$. Hvis vi betegner den mængde der indgives til tiden $t = 0$ som $Q_i(0)$, hvor index i blot betegner input (input til systemet), så vil den mængde der er i systemet (vævet) som funktion af tiden være $Q_i(0)$ multipliseret med $g(t)$. Dette produkt vil vi benævne $Q_i(t)$ hvor indexet t står for "tissue". Man kan derfor skrive :

$$Q_i(t) = Q_i(0) \cdot g(t)$$

$Q_i(t)$ betegner altså hvor mange mol af kontraststof, efter en (uendelig) hurtig bolus injektion til den betragtede vævsmængde, W , der resterer i vævet som funktion af tiden. Vi forestiller os nu at der til tiden τ_1 indgives en ny bolus af kontraststof, måske på et tidspunkt hvor der stadig resterer noget kontraststof fra den første bolus. Mængden af den anden bolus betegner vi $Q_i(\tau_1)$. Vi forventer da (hvis systemet er liniært og tidsinvariant) at denne bolus vil give anledning til et respons af samme form som det første, men tidsforskuet til højre svarende til τ_1 , det vil sige at anden bolus må give anledning til et bidrag svarende til $Q_i(\tau_1)g(t - \tau_1)$. Da vi stadig har noget fra første bolus, så er den samlede mængde i vævet:

$$Q_i(t) = Q_i(0) \cdot g(t) + Q_i(\tau_1) \cdot g(t - \tau_1)$$

Hvis der indgives en tredje bolus til tiden τ_2 får vi den samlede vævsmængde i vævet til:

$$Q_i(t) = Q_i(0) \cdot g(t) + Q_i(\tau_1) \cdot g(t - \tau_1) + Q_i(\tau_2) \cdot g(t - \tau_2)$$

Sættes $\tau_0 = 0$ kan man skrive dette kompakt som:

$$Q_i(t) = Q_i(\tau_0) \cdot g(t - \tau_0) + Q_i(\tau_1) \cdot g(t - \tau_1) + Q_i(\tau_2) \cdot g(t - \tau_2) = \sum_{j=0}^{j=3} Q_i(\tau_j) \cdot g(t - \tau_j)$$

Den enkelte bolus (egentlig delta funktion) $Q_i(\tau_j)$ kan også udtrykkes ved hjælp af blodtilførelsen til vævet og koncentrationen af kontraststoffet i det blod der løber til vævet og der må gælde:

$$Q_i(\tau_j) = C_i(\tau_j) \cdot F \cdot \Delta\tau$$

Hvor $\Delta\tau$ er et så tilpas lille tidsinterval hvorunder blodkoncentrationen kan antages at være konstant. Prøv at udføre en dimensions betragtning af ovenstående udtryk. Indføres dette udtryk fås:

$$Q_i(t) = \sum_{j=0}^{j=3} Q_i(\tau_j) \cdot g(t - \tau_j) = F \sum_{j=0}^{j=3} C_i(\tau_j) \cdot g(t - \tau_j) \cdot \Delta\tau$$

Yderligere kan vævsmængden $Q_i(t)$ skrives som vævskoncentrationen multipliseret med vægten af vævet:

$$Q_i(t) = C_i(t) \cdot W$$

Prøv igen at udføre en dimensions betragtning af dette. Indføres dette udtryk fås:

$$C_i(t) = \frac{F}{W} \sum_{j=0}^{j=3} C_i(\tau_j) \cdot g(t - \tau_j) \cdot \Delta\tau$$

F/W betegner blodtilførelsen i ml/sec pr gram væv og betegnes f . Har vi indgivet ikke blot 3 input men N kan man skrive:

$$C_i(t) = f \sum_{j=0}^{N-1} C_i(\tau_j) \cdot g(t - \tau_j) \cdot \Delta\tau$$

Gør man tidsintervallerne mellem bolus injektionerne mindre og mindre kan man erstatte summationstegnet med integral tegn og $\Delta\tau$ erstattes med $d\tau$:

$$C_i(t) = f \int_{-\infty}^{\infty} C_i(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau = f \int_{-\infty}^{\infty} C_i(t - \tau) \cdot g(\tau) \cdot d\tau$$

I sidste tilfælde er de indgående funktioner kontinuerte funktioner og vi har med dette udtryk fundet en sammenhæng mellem vævskoncentrationen som funktion af tiden, arterie koncentrationen som funktion af tiden, perfusionen og vævets impuls respons. Ved hjælp af dette udtryk kan man også finde vævsperfusionen, hvis man måler vævskoncentrationen, f.eks dynamisk ved CT eller MR eller PET skanning, og samtidig måler arteriekoncentrationen som funktion af tiden i en tilførende arterie. Funktionen $g(t)$ må enten måles separat eller man må gøre nogle antagelser af formen af

denne (residual) impuls respons funktion. Ovenfor forestillede vi os at man kunne indgive en bolus direkte ind i vævet momentant. Dette er kun muligt med en (micro) kanyle og er i praksis ikke mulig bortset ved enkelte dyreforsøg. Som oftest ønsker vi at indgive en tracer eller et kontraststof som en bolus ind i en perifer vene. Dette vil altid bevirke traceren eller kontraststoffet ankommer til vævet med forskellig hastighed og en fordeling som er udglattet og langt fra at betragte som en momentan indgivet bolus. Her kommer ovenstående formalisme os til hjælp idet vi blot skal måle arteriekoncentrationen som funktion af tiden. Vi kan forestille os at den udglattede (disperse) arterie input består af en række i tid uendelig korte input hver med mængden $C_i(t) F dt$. Denne betragtning vil som vist ovenfor netop føre til foldnings integralet.

Inden vi forlader foldning skal det vises at der er en speciel sammenhæng mellem foldning og Fouriertransformation. Vi ønsker at Fourier transformere den kontinuerte funktion g foldet med den kontinuerte funktion f :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (g \otimes f) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau \right] \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$\exp(-i\omega t)$ kan omskrives til $\exp(-i\omega(t-\tau))\exp(-i\omega\tau)$ som indsættes:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (g \otimes f) \cdot e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau \right] \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot f(t - \tau) \cdot e^{-i\omega t} d\tau \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot f(t - \tau) \cdot e^{-i\omega(t-\tau)} \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot f(t - \tau) \cdot e^{-i\omega(t-\tau)} \cdot e^{-i\omega\tau} dt \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \cdot e^{-i\omega(t-\tau)} dt \right] \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot F(\omega) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = F(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = F(\omega) \cdot G(\omega) \end{aligned}$$

hvor F og G betegner henholdsvis Fourier transformationen af f og g . Af dette ser man at foldning i tidsdomænet svarer til at man multipliserer i frekvensdomænet. Dette kan man benytte sig af i praksis. Hvis man skal folde to funktioner kan man først Fourier transformere begge funktioner, herefter multiplisere de Fourier transformerede størrelser og herefter tage den omvendte Fourier transformation hvorefter man har det ønskede resultat. Det kan også vises at vis man multipliserer $g(t)$ med $f(t)$, så svarer det til at $G(\omega)$ foldes med $F(\omega)$ altså:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau \right] \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot F(\omega) \cdot e^{-i\omega t} dt = F(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

Gå tilbage til fig.19 og prøv at forklare hvordan sidste sætning kan anvendes i dette tilfælde.

Figure

Fig.22

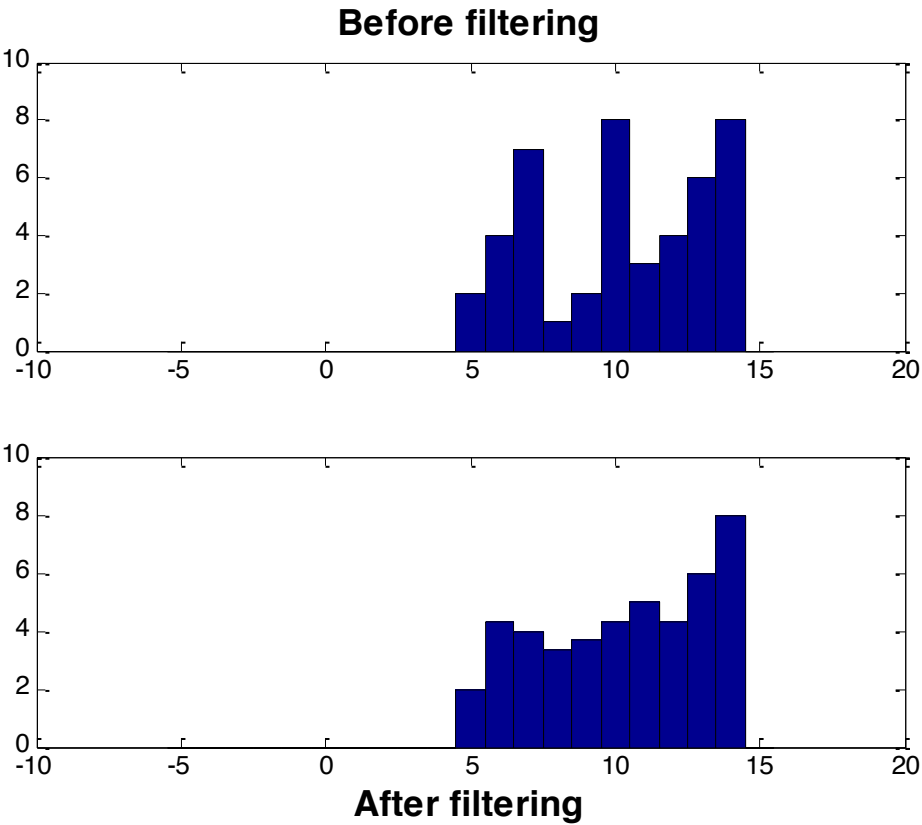


Fig.23_1

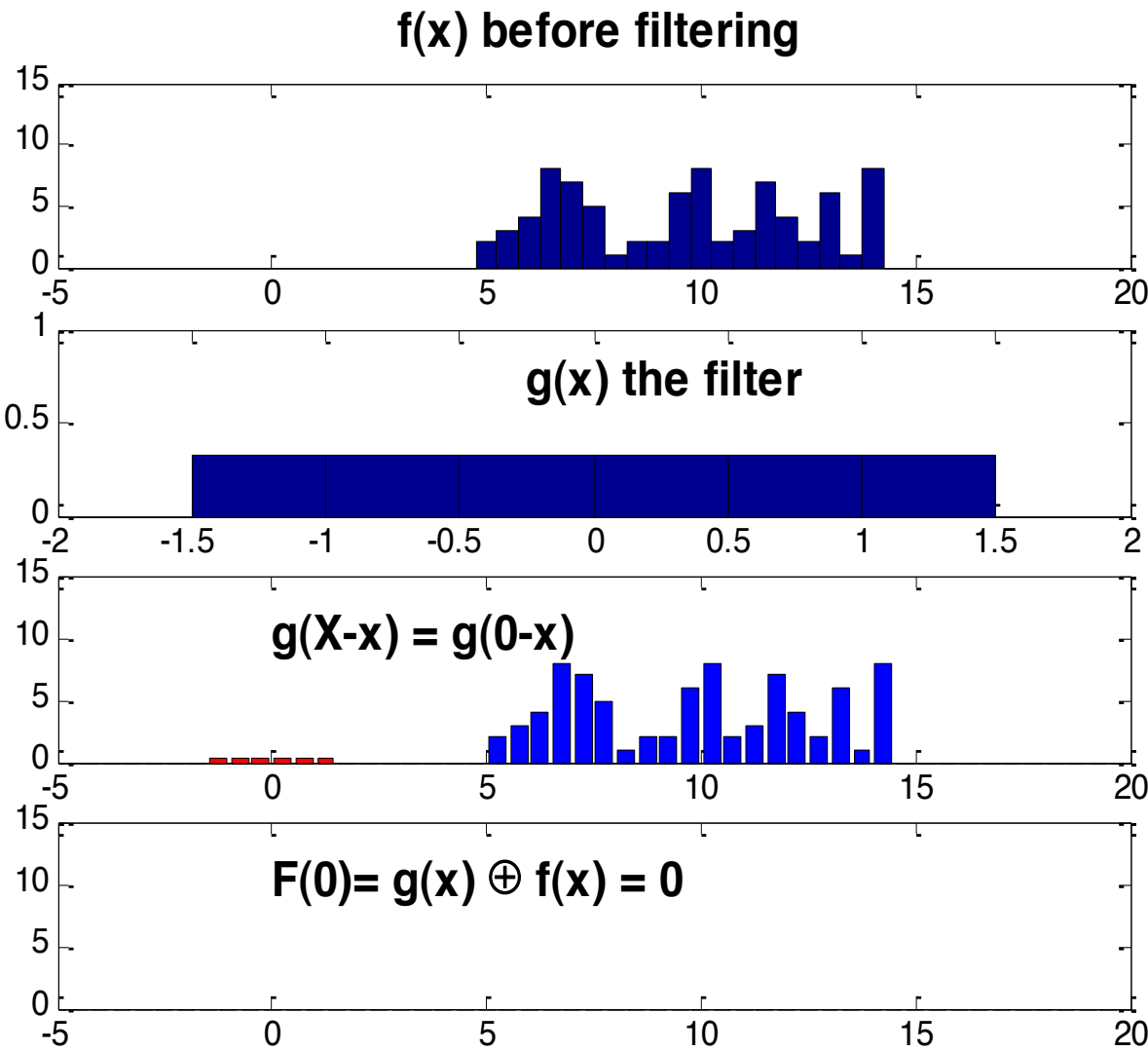


Fig.23_2

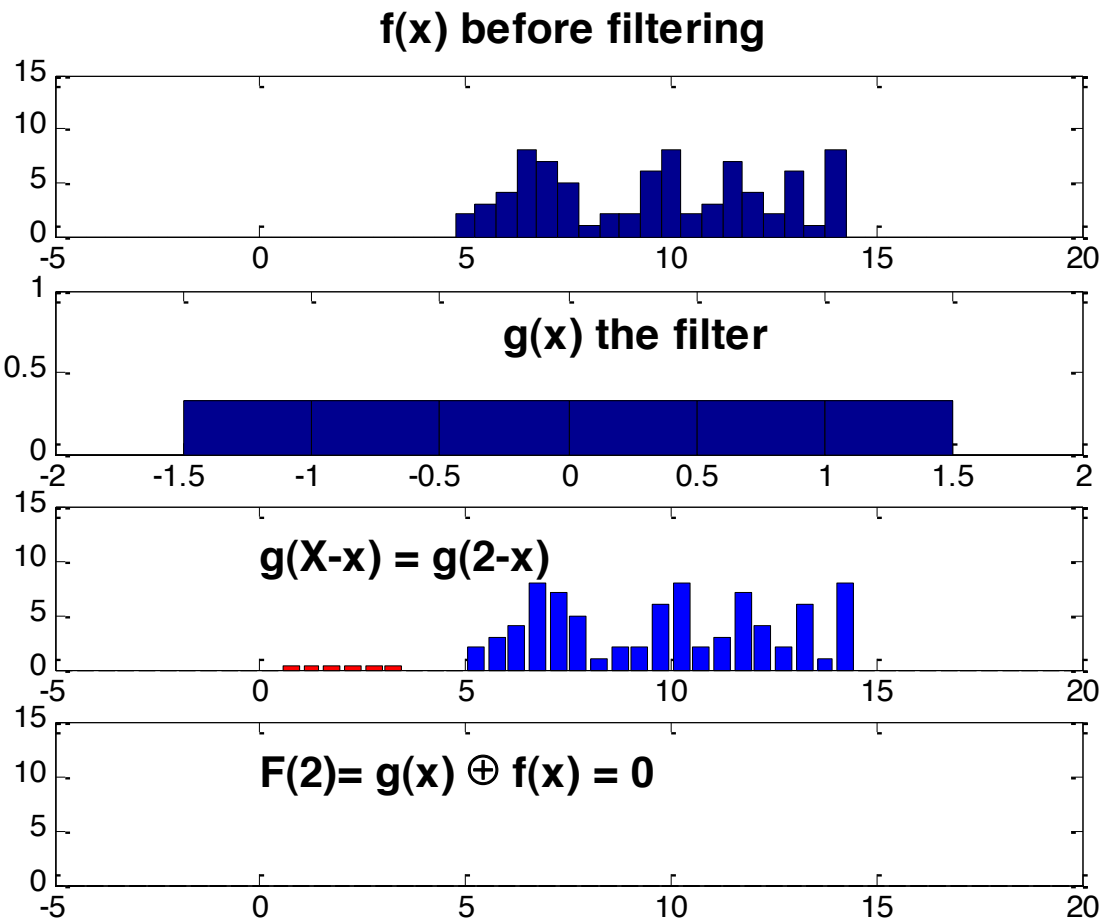


Fig.23_3

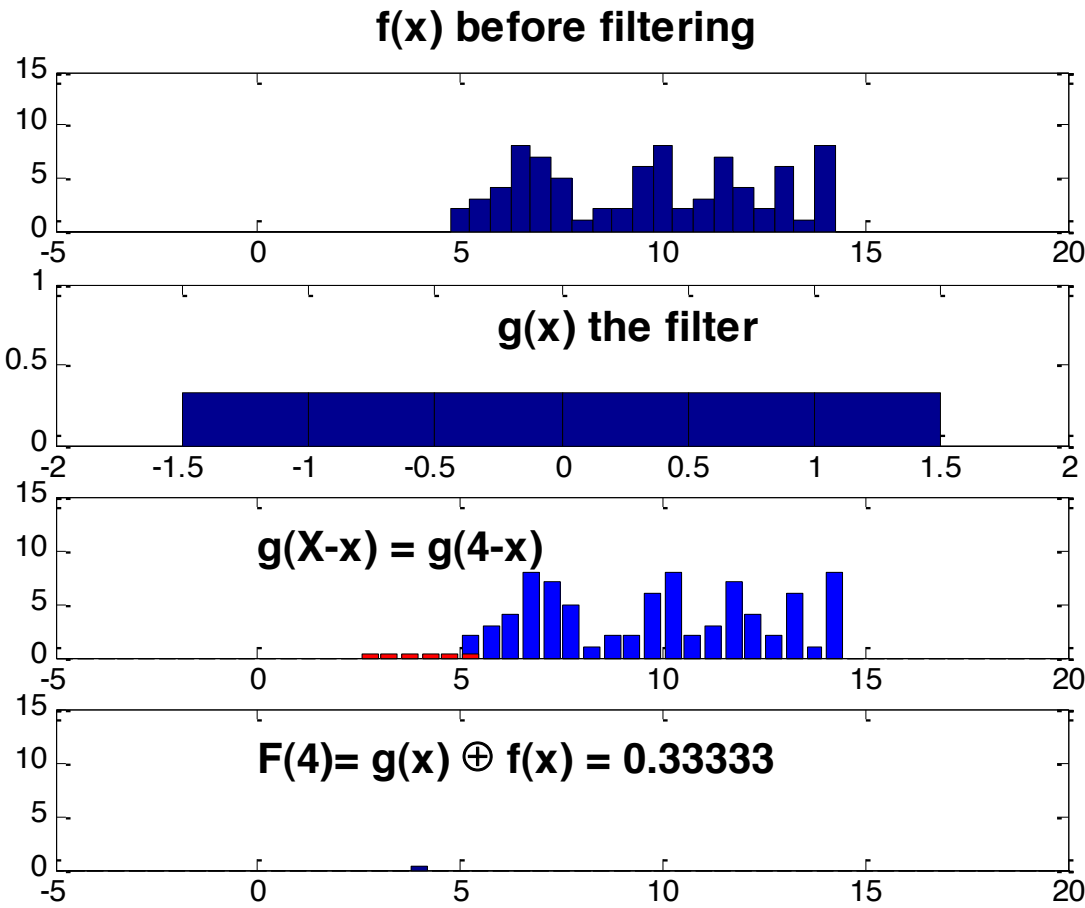


Fig.23_4

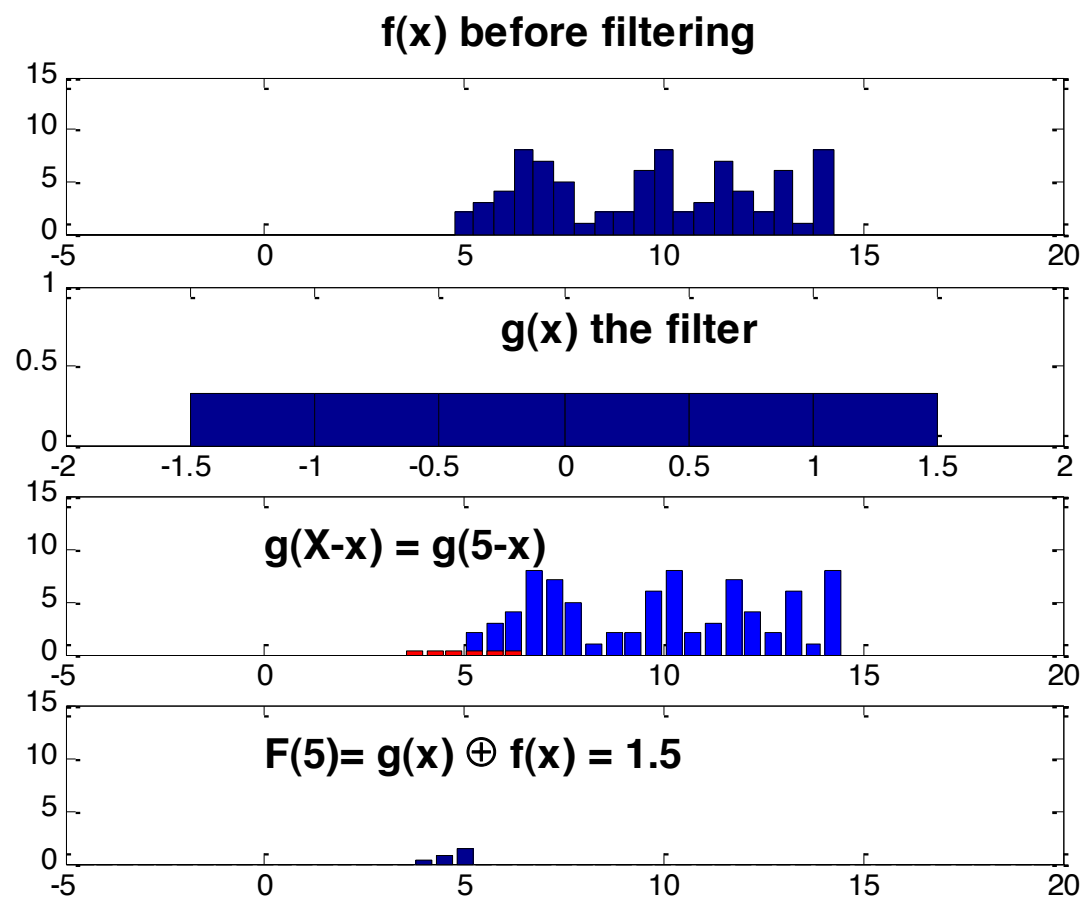


Fig.23_5

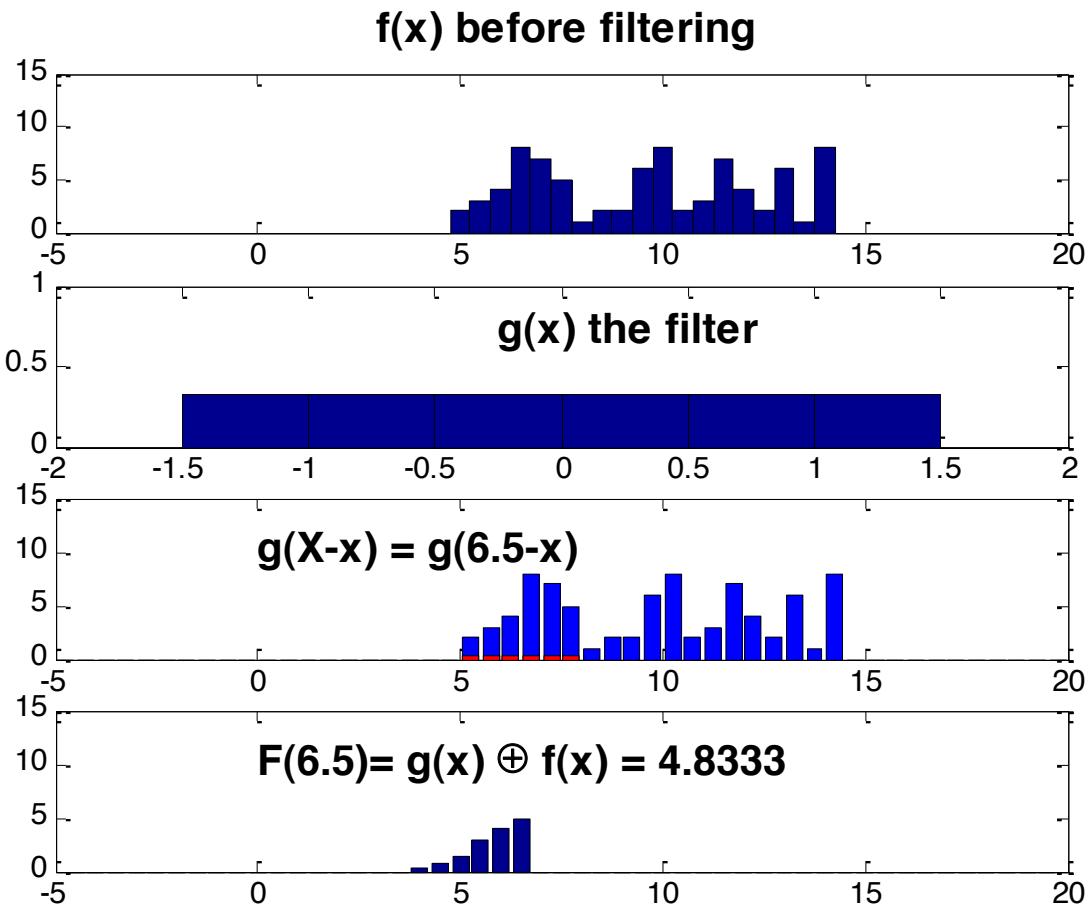


Fig.23_6

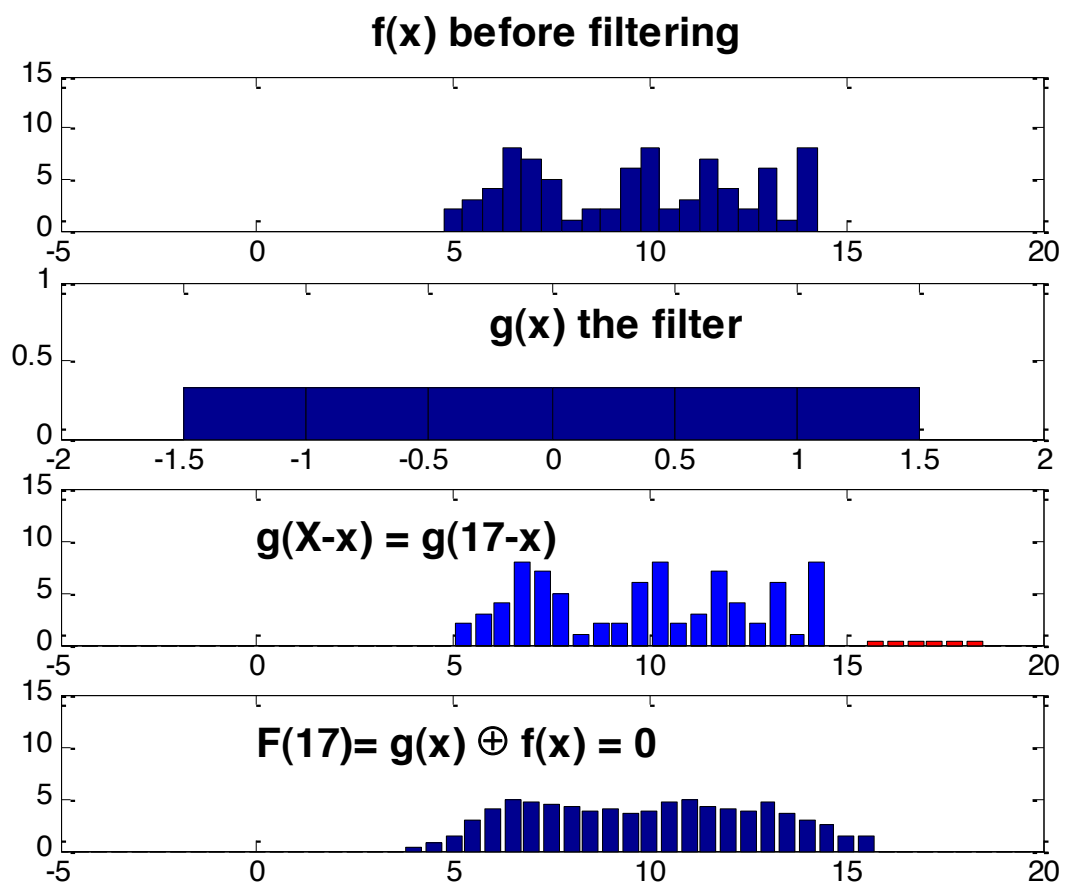


Fig.24

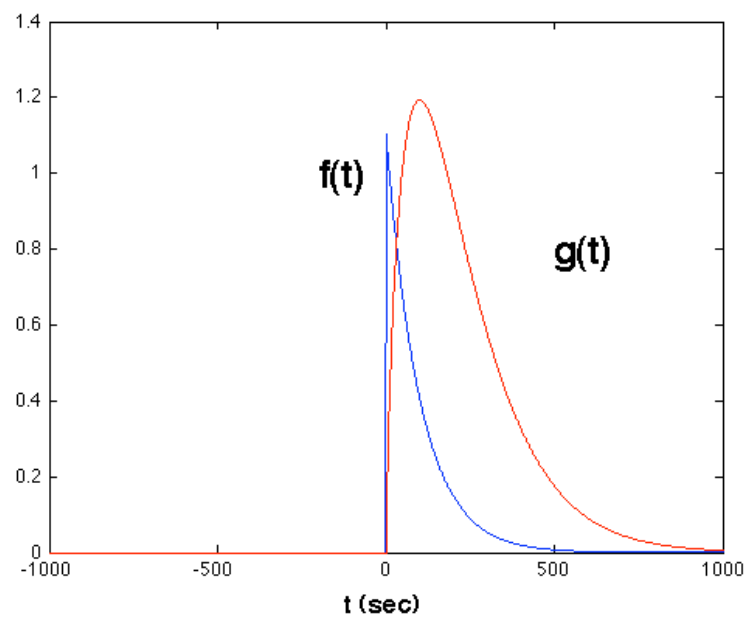


Fig.24_2

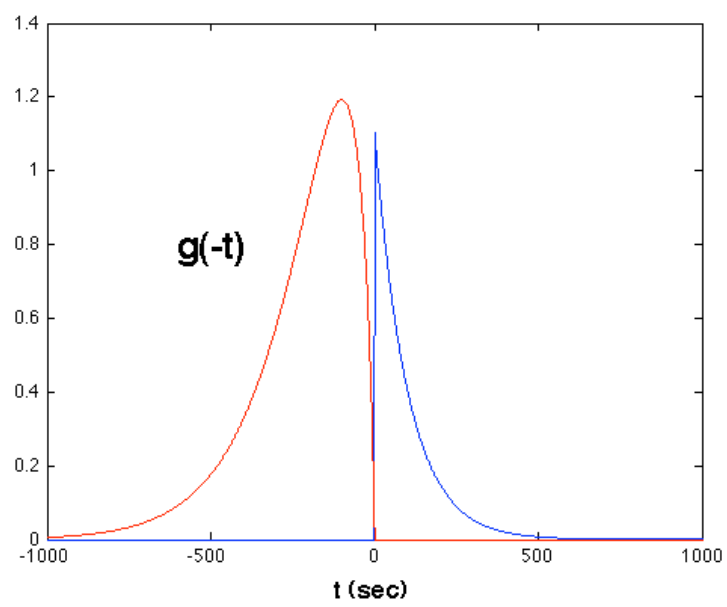


Fig.24_3

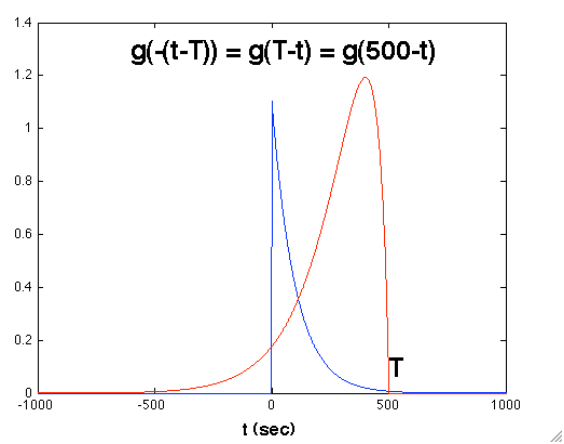
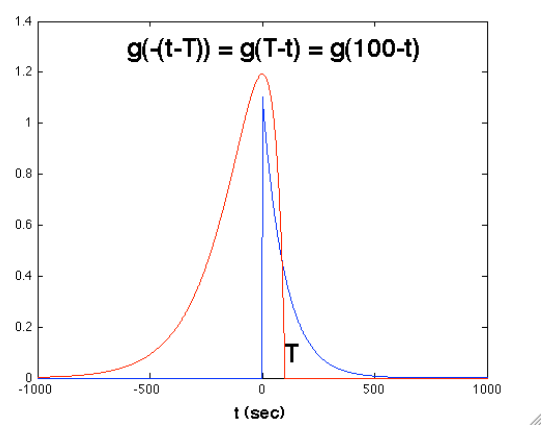
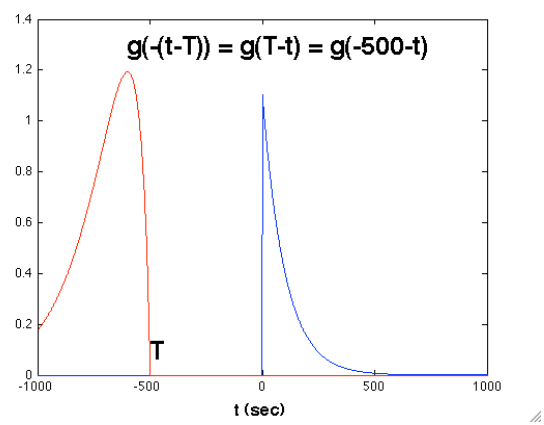


Fig.24_4

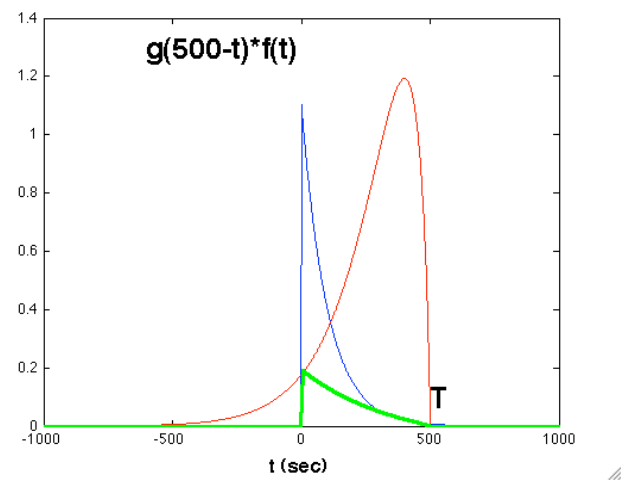
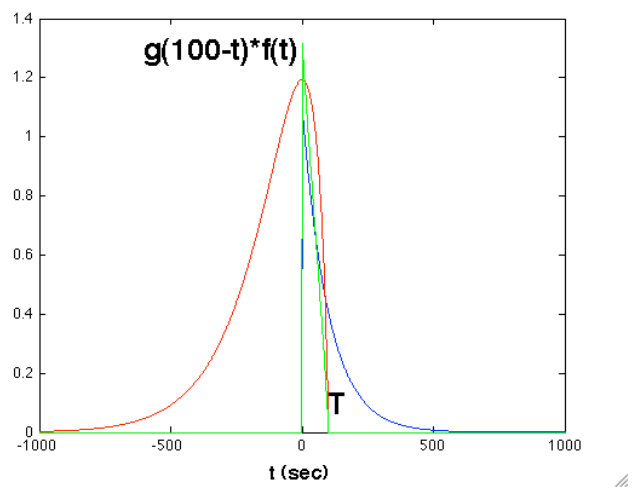
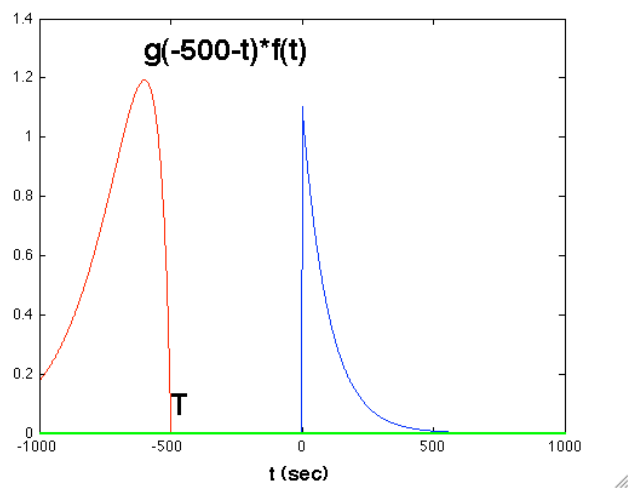


Fig.24_5

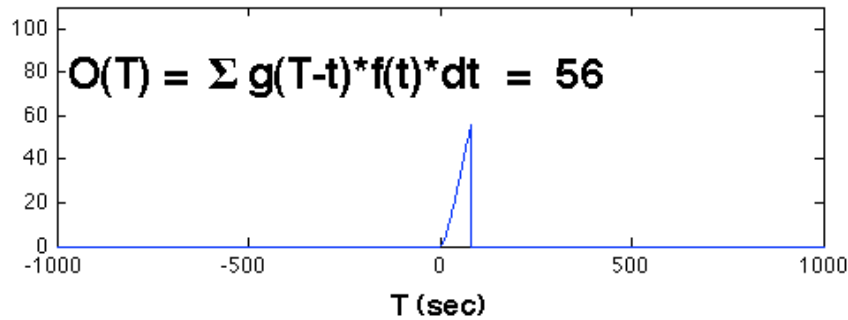
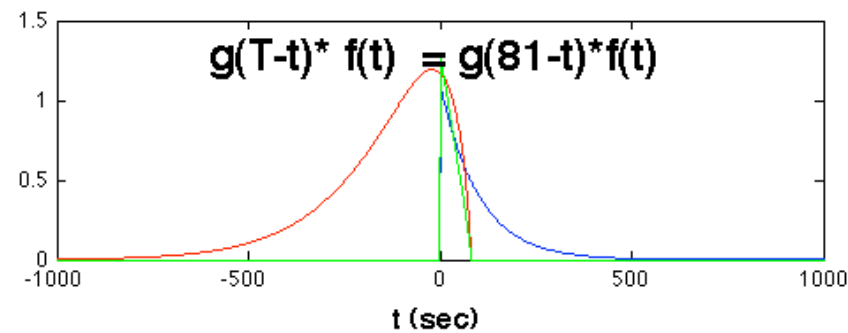
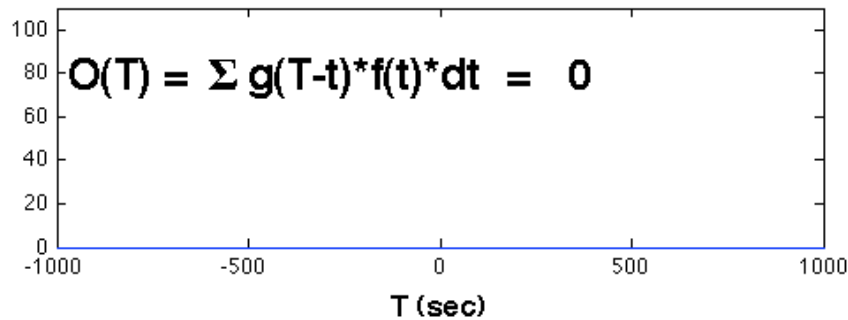
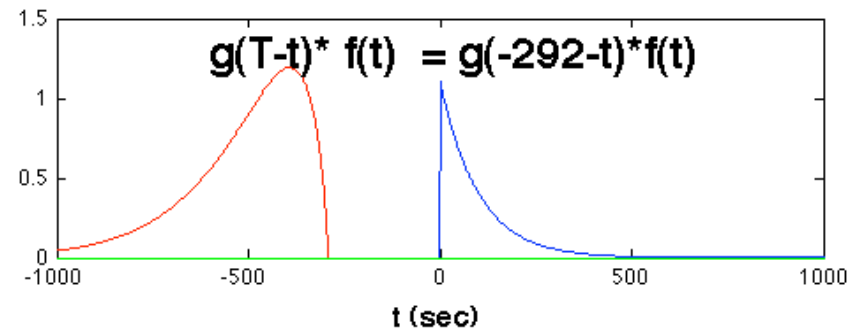


Fig.24_6

